

Проф. С. А. БОГОМОЛОВ

ВВЕДЕНИЕ В НЕЕВКЛИДОВУ ГЕОМЕТРИЮ РИМАНА



ОНТИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД — 1934 — МОСКВА



ПРЕДИСЛОВИЕ.

Название „неевклидова геометрия“ широкие круги читателей обычно связывают с именем Лобачевского; настоящая же работа посвящена другой неевклидовой геометрии, носящей имя немецкого математика Римана (точнее говоря, здесь главным образом будет идти речь об эллиптической форме ее).

К обоснованию геометрии можно подходить различными путями: чисто аналитически, или при помощи предварительного обоснования проективной геометрии, или, наконец, тем самым элементарно-синтетическим путем, которым шли Евклид и Лобачевский (но не Риман). Автор имел случай в другом месте*) сравнить указанные три направления и пришел там к выводу, что элементарно-синтетический путь является основным и наиболее естественным.

Геометрия Римана особенно бедна исследованиями в этом направлении; автор старался по мере сил восполнить указанный пробел в своем „Опыте элементарного обоснования геометрии Римана“.**) Настоящая книга является сокращенным изложением названной работы;

*) Богомолов. Различные пути для обоснования геометрии. (Изв. Электротехн. инст., 1914, вып. X).

**) Рукопись была на рассмотрении Математической комиссии Ленинградского университета и удостоилась одобрения; обе работы получили премии Наркомпроса.

мы имеем в виду ознакомить читателя со всеми особенностями эллиптической геометрии, и, путем вывода тригонометрических формул и начал аналитической геометрии, открыть ему широкую дверь для более глубокого знакомства с геометрией Римана.

Развитие неевклидовой геометрии способствовало более глубокому познанию действительности; достаточно вспомнить, что принцип относительности имеет своей основой общую геометрию Римана. Неевклидовы геометрии в узком смысле этого слова (геометрии Лобачевского и Римана) являются первым шагом на пути этих обобщений.

При доказательстве теорем геометрии мы опираемся на аксиомы; последние имеют двойственную природу: с одной стороны, они являются заключением геометрического исследования, а с другой — его началом. Действительно, только после 2000-летнего развития геометрии, в результате логической переработки исторически накопленных знаний, мы пришли к сколько-нибудь выработанной системе аксиом; особенно нелегким был этот вопрос для геометрии Римана. Но для того, чтобы начать построение геометрии, надо указать тот фундамент, на котором мы будем строить, так что во главе приходится ставить аксиомы, выработанные предшествующим развитием науки. В дальнейшем само это построение может способствовать более правильному и более глубокому решению вопроса об аксиомах. При изложении геометрии Римана, имеющей весьма существенные отличия от некоторых казалось бы незыблемых положений евклидовой геометрии, особенно важно было решить вопрос об аксиомах, являющихся опорой для исследователя. По той же причине автор избрал аксиоматический метод построения, как могущий предохранить от ошибок в неизведанной области. Вследствие этого некоторые места книги (ее начало, учение о смысле геометрических фи-

гур) имеют ясно выраженный формальный характер; но автор не видел, как можно обойтись без этого. В частности, учение о смысле позволяет выяснить до конца такую важную особенность эллиптической геометрии, как односторонность ее плоскости.

С. Богомолов.

Ленинград, 18 августа 1933 г.

ВВЕДЕНИЕ.

В 1868 г. появилась в печати написанная еще в 1854 г. знаменитая диссертация Р им а н а „О гипотезах, лежащих в основании геометрии“ *). В этой работе автор, ограничиваясь краткими намеками, явился основателем аналитического направления в деле обоснования геометрии (которому мы здесь следовать не будем); надо также отметить, что Р им а н одним из первых заговорил о пространствах, n -кратно протяженных **). Для нас здесь главная заслуга Р им а н а заключается в том, что он установил возможность другой неевклидовой геометрии, которая дотоле отрицалась в силу допущения о бесконечности прямой, признаваемой ее неотъемлемым свойством. Именно, Р им а н различил в этом вопросе понятия о безграничности и бесконечности пространства, которые обычно смешивались. Безграничность есть качественное свойство пространства и состоит в том, что для каждой данной части пространства можно строить смежные пространства; и это свойство действительно неотъемлемо от пространства нашего представления. Бесконечность же есть свойство количественное; к нему нас приводит другой ход мысли, исходящий из понятия об измерении. Оба свойства не связаны друг

*) Сборник „Об основаниях геометрии“. Казань, 1893.

**) Указания по этому вопросу и перечень литературы читатель может найти в книге: В. Ф. Ка г а н, Основания геометрии. Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии. Одесса, 1907, стр. 413 и след.

с другом неразрывным образом, как это можно видеть на примере одного пространства 2-х измерений, а именно — на поверхности шара: последняя — безгранична в указанном выше смысле, но тем не менее имеет конечные размеры. Поэтому безграничность прямой может быть совместима с ее конечной длиной (в случае замкнутой линии).

Подобные соображения Р им а н а имели решающее значение для признания „третьей возможности“ в вопросе о параллельных прямых и вообще для развития неевклидовой геометрии.

Упомянутая выше „третья возможность“ рассматривает допущение, что всякие две прямые одной и той же плоскости всегда пересекаются. В таком случае прямая уже не может быть открытой линией, как в геометриях Евклида и Лобачевского; действительно, отсутствие параллелей позволяет установить одно-однозначное соответствие между точками прямой и прямыми пучка, а этот последний является замкнутым рядом. Геометрия, которая исходит из таких предпосылок, носит имя Р и м а н а; по числу точек пересечения у двух прямых она делится на две различные системы. Подойти к этому выводу можно с помощью такого рассуждения.

Возьмем прямую AB и в некоторой проходящей через нее плоскости восставим к ней перпендикуляры в точках A и B . Согласно основному положению геометрии Римана, эти перпендикуляры пересекутся в точке C . В виду симметрии фигуры относительно линии AB , мы должны допустить у построенных перпендикуляров еще другую общую точку C' , симметричную с C относительно прямой AB . Теперь мыслимы две возможности: или точки C и C' различны, или они совпадают. В первом случае мы должны отказаться от аксиомы, что две точки всегда определяют только одну прямую; во втором же случае это утверждение останется в силе, но зато

явится новая особенность по сравнению с геометриями Евклида и Лобачевского. Дело в том, что при замкнутости прямой две точки делят ее на два отрезка; а так как две различные прямые всегда пересекаются только в одной точке, то один из отрезков всегда имеет общую точку с данной прямой, а другой всегда свободен от таких точек. Такое положение дела не дает возможности различить случаи, когда две данные точки лежат по одну сторону от данной прямой и когда — по разные, так что при рассматриваемом допущении прямая не делит плоскости на две отдельные части.

По почину Клейна, условимся называть эллиптической ту систему геометрии Римана, которая характеризуется наличием единственной точки пересечения у двух прямых, а ту систему, в которой имеют место две общих точки, назовем сферической.

Отношение самого Римана к раздвоению созданной им геометрии — не совсем ясно. На это раздвоение впервые указал Клейн в своих мемуарах от 1871 и 1873 г.*). Дальнейшее развитие вопроса находим в работах Киллинга. Начиная с 1879 г., названный ученый представил ряд доказательств того, что геометрия Римана распадается на две и только на две различные формы**).

В 1877 г. появился мемуар Ньюкомба***), в котором впервые самостоятельно обосновывается эллиптическая геометрия и при том — элементарным путем. В основу кладутся три постулата очень богатого и не вполне опре-

*) „Ueber die sogenannte Nicht-Eukl. Geometrie“ Math. Ann. Bd. 4 (примечание на стр. 604—605), Bd. 6 (стр. 125).

**) См. например: „Einführung in die Grundlagen der Geometrie“ Paderborn. Bd. I, S. 54—57. В нашем „Опыте“ подробно разобраны как доказательства Киллинга, так и другие (Уайтхэд, Кулидж).

***) Newcomb, Elementary theorems relating to the geometry of a space of three dimensions and of uniform positive curvature in the fourth dimension (Journal für die reine und angew. Math., Bd 83, S. 293—299).

деленного содержания, и все-таки этих постулатов автору оказывается недостаточно. Некоторый вклад в эллиптическую геометрию сделал К и л л и н г в выше упоминавшейся книге.

Довольно полное и систематическое изложение эллиптической геометрии, но при чрезвычайном своеобразии метода, мы находим в известной книге У а й т х э д а *). В качестве одной из специальных „алгебр“, излагается созданное Г р а с с м а н о м исчисление протяжения, которое впоследствии прилагается к изучению эллиптической геометрии.

Не имея возможности входить здесь в подробный обзор литературы вопроса, мы укажем в заключение те немногие работы, в которых более или менее полно и систематически затронуты важнейшие вопросы эллиптической геометрии:

1) Б о н о л а, Теория параллельности и неевклидовы геометрии (известный сборник под редакцией Э н р и - к в е с а).

Эллиптическая геометрия излагается на стр. 349—373. Постановка исследования страдает некоторой неопределенностью, но необходимо отметить подробный вывод тригонометрических зависимостей; стереометрии не имеется. Здесь же следует упомянуть о другой книге того же автора: Б о н о л а. Неевклидова геометрия, СПб, 1910; в приложении II излагается теория „параллелей и поверхности К л и ф ф о р д а“, которым нам придется своевременно уделить соответствующее внимание.

2) C o o l i d g e, The Elements of Non-Euclidean Geometry, Oxford, 1909.

Автор ставит себе задачу одновременно построить все три геометрии и подходит к ее решению со всех трех указанных выше точек зрения; однако по существу пер-

*) Whitehead, A Treatise on Universal Algebra, vol. I (Cambridge, 1898).

венствует проективный метод. Такая постановка дела вызывает известную громоздкость изложения; но необходимо отметить богатый материал, включающий высшие отделы приложения анализа к геометрии.

3) Liebmann, Nichteuklidische Geometrie. (Sammlung Schubert 49, Leipzig, 1912).

Здесь в сущности наибольшее внимание уделено сферической системе и лишь на стр. 170—177 излагаются различные подступы к эллиптической геометрии.

Подробный разбор как этих, так и других работ привел нас к выводу, что задача систематического и элементарно-синтетического обоснования геометрии Римана еще не потеряла своего интереса.

Такое именно обоснование и является задачей настоящей книги, причем здесь мы будем иметь в виду исключительно эллиптическую систему геометрии Римана.

Такое предпочтение в пользу эллиптической геометрии объясняется тем, что сферическая нам более знакома: ее планиметрию давно уже изучали под видом геометрии на поверхности шара *); благодаря этому обстоятельству, даже обычная пространственная интуиция может оказать значительную помощь при изучении сферической геометрии. Совсем не то видим мы по отношению к эллиптической системе: она менее разработана, между тем содержит такие особенности (как например: односторонность плоскости, существование четырех треугольников с тремя данными вершинами, возможность пересечения двух окружностей в четырех точках), которые требуют именно подробной разработки, тем более что обычная

*) Роль „прямых“ здесь исполняют окружности больших кругов, которые суть замкнутые линии; две такие окружности, лежащие на одной и той же шаровой поверхности, всегда пересекаются и при том в двух диаметрально противоположных точках.

интуиция в этих вопросах способна скорее затруднить исследователя, чем оказать ему помощь. Впрочем надо прибавить, что, по верному замечанию Либмана, обе системы геометрии Римана тождественны в ограниченной области и только при переходе к полному пространству дают различные картины.

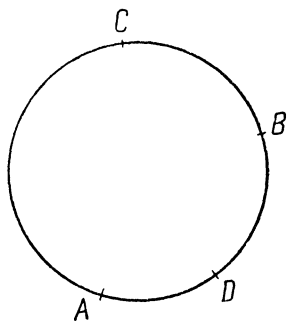
Сказанное в достаточной мере поясняет, что при построении эллиптической геометрии особенно важно придерживаться так называемого аксиоматического изложения, т. е. отчетливо перечислить основные понятия, принимаемые без определения (общелогические понятия в счет не идут), и основные предложения или аксиомы, принимаемые без доказательства, а все остальное развить строго логически, соблюдая известные правила относительно определений и доказательств. Однако осуществить такое построение эллиптической геометрии шаг за шагом, во всех подробностях было бы возможно лишь в работе, значительно превосходящей по своим размерам настоящую книгу. Поэтому здесь нам придется сосредоточить внимание читателя главным образом на характерных особенностях рассматриваемой геометрии, мало уделяя времени тем предложениям, которые общи ей с геометрией Евклида; да и в вопросах первого рода подчас придется ограничиться выяснением типичических приемов доказательства, а затем прибегать к ссылкам на аналогию.

При построении геометрии хорошим вспомогательным средством служат чертежи, особенно — там, где приходится экономить место. Мы не даем чертежа в простейших случаях, предоставляя сделать таковой самому читателю, но, вообще говоря, рассуждения сопровождаем чертежами. Последние имеют большей частью схематический характер; некоторые особенности геометрии Римана, както: замкнутость прямой, пересечение двух перпендикуляров к одной прямой и т. п. — таковы, что не поддаются точ-

ному воспроизведению на чертеже. Однако и такие чертежи приносят пользу: греша в одном отношении, в других они могут правильно воспроизводить соотношения рассматриваемых фигур; неточности же их при аксиоматическом изложении никакими опасностями не грозят. Читателю, вероятно, случалось с успехом доказывать свойства круга на весьма неправильном, нарисованном от руки овале.

Изложенное в первой части Введения позволяет уже заключить, что переход от евклидовой геометрии к эллиптической сложнее, чем к гиперболической (геометрии Лобачевского). Там требовалось только изменить аксиому параллелей, оставляя в неприкосновенности все остальные; здесь же потребуются более глубокие изменения в системе аксиом. Прямая теперь является линией замкнутой, а потому вопросы расположения ее точек нельзя обработать при помощи понятия „между“, как это делает Гильберт, или при помощи понятия „предшествовать“, как это рекомендует Вайляти. Эти понятия весьма пригодны для открытой прямой геометрий Евклида и Лобачевского, но теряют смысл в применении к замкнутой прямой Римана. Следующее наглядное рассуждение пояснит нам это.

Возьмем на окружности, которая может служить типическим примером замкнутой линии, три точки: A , B , C (черт. 1); так как точки A и B делят данную окружность на две дуги (на два „отрезка“), то с одинаковым правом можно сказать, что точка C лежит и не лежит между A и B ; все зависит от того, какая именно дуга имеется



Черт. 1.

в виду. Таким образом понятие „между“ теряет здесь определенный смысл; подобное же можно утверждать и о понятии „предшествовать“. Но вот если присоединим сюда еще 4-ую точку D , то относительно взаимного расположения пар C, D и A, B можно высказать определенное утверждение; именно, точки C и D могут принадлежать одной и той же дуге AB или различным дугам AB . В последнем случае говорят, что „пара A, B разделяет пару C, D “ и обозначают это обстоятельство символом:

$$AB'CD.$$

Разделение пар имеет место и на евклидовой прямой, но там оно сводится к более простым понятиям, тогда как для замкнутой линии оно имеет основное значение.

Заслуга разработки вопроса о расположении точек на замкнутой прямой принадлежит тому же итальянскому геометру Вайляти *). Следуя в общем его указаниям, мы примем „разделение пар“ в качестве основного понятия и характеризуем его с помощью соответственных аксиом. При этом подходящим образом выбранные аксиомы позволяют определить прямую, исходя из названного понятия, так что нет надобности брать „прямую“ в качестве основного понятия (существенное значение имеет здесь аксиома VII). Это обстоятельство влечет за собой значительное отличие нашей системы аксиом от той, которая известна по работе Гильберта. Далее, хотя учение о равенстве, в основных чертах своих, сходно с евклидовым, однако аксиомы равенства в эллиптической геометрии имеют своеобразный характер; причиной тому

*) Две небольших статьи Vailati напечатаны в томе V журнала „Rivista di Matematica“; к ним примыкает статья Padoa, напечатанная в томе VI того же журнала. Идеи Вайляти подробно разобраны нами в книге: „Вопросы обоснования геометрии“ (Москва, 1913), стр. 194 и след.; полученные там выводы будут использованы здесь.

служит опять-таки замкнутость прямой. В общем мы вводим 23 аксиомы, которые высказываются по мере надобности.

В заключение мы коснемся некоторых технических вопросов. В интересах экономии места мы будем позволять себе некоторые сокращения; так, часто встречающиеся термины: „точка“, „прямая“, „плоскость“, „полупрямая“, мы будем обозначать сокращенно: „т.“, „пр.“, „пл.“, „ппр.“.

С той же целью мы заимствуем из символической логики некоторое естественное расширение математического символизма (это относится главным образом к главе I). Так, символ:

$$\supset$$

указывает, что предложение, стоящее слева, влечет за собой предложение, стоящее справа; например

$$p \supset q$$

обозначает, что предложение p влечет за собой предложение q . Другой символ:

$$\equiv$$

указывает на равносильность соединяемых им предложений.

Одновременное утверждение нескольких предложений обозначается в символической логике так же, как в алгебре произведение; так например, символ

$$p \cdot q$$

выражает одновременное утверждение предложений p и q .

Точки играют еще и другую роль в символической логике: они заменяют скобки, причем большее число точек соответствует внешним скобкам. Так например, символ

$$p \cdot q : \supset \cdot r$$

обозначает, что одновременное утверждение предложений p и q влечет за собой утверждение предложения r , и т. д.

Наконец, через всю книгу проходит единая нумерация теорем, причем в квадратные скобки заключены номера тех предложений, которые имеют исключительно вспомогательное значение, не представляя большого интереса сами по себе.

I. ОБОСНОВАНИЕ ГЕОМЕТРИИ ПОЛОЖЕНИЯ.

Основное понятие: „точка“ (иногда мы будем позволять себе сокращение: „т.“).

В сущности „точка“ есть не что иное, как название тех элементов, из которых геометрия строит свои образы.

Для обозначения различных точек употребляются большие буквы латинского алфавита.

Определение 1. Совокупность всех точек называется пространством.

Свойства эллиптического пространства, выделяющие его из множества других совокупностей точек, указаны в следующих аксиомах.

Аксиома I. *Пространство содержит по крайней мере 4 различных точки.*

Для установления соотношений между точками вводится второе основное понятие:

Основное понятие: „разделение двух пар точек“. Это понятие есть известное отношение между парами точек и, как таковое, подходит под общелогическое понятие „отношение“; его свойства указываются в следующих аксиомах. Если пара A, B разделяет пару C, D , то это утверждение выражается символом:

$$AB|CD.$$

Аксиома II. *Если A и B суть различные точки, то существуют две такие точки M и N , что имеет место:*

$$AB|MN.$$

Аксиома III. Если имеет место разделение $AB|CD$, то точки каждой пары различны.

Аксиома IV. $AB|CD \cdot \circ \cdot CD|AB$.

(Первое разделение всегда влечет за собой второе).

Аксиома V. $AB|CD \cdot \circ \cdot AB|DC$.

(Первое разделение всегда влечет за собою второе).

1. В формуле $AB|CD$ можно переставлять точки каждой пары и самые пары (аксиомы IV и V).

Аксиома VI. Если имеет место $AB|CD$, то не имеет места $AC|BD$.

2. Если имеет место $AB|CD$, то не имеет места $AD|BC$ (аксиомы V и VI).

3. Если имеет место $AB|CD$, то все четыре точки различны.

Действительно, точки каждой пары различны (III); если допустить, что B и C совпадают, то:

$$AB|CD \cdot \circ \cdot AC|BD,$$

а это противоречит аксиоме VI. Дальнейшее вытекает из теоремы 1.

Аксиома VII. Если даны два разделения пар, содержащие по две одинаковых точки, и если A, B, C, D суть четыре различные точки, входящие в данные формулы, то имеет место одно из разделений: или $AB|CD$, или $AC|BD$, или $AD|BC$.

По поводу формулировки последней аксиомы надо заметить, что этому предложению можно дать более простую форму, если уже владеть понятием прямой (см. теорему 14). Но так как понятия прямой у нас еще нет, то приходится избрать более сложную формулировку, и эта аксиома VII играет существенную роль при образовании названного понятия.

4. Из указанных разделений имеет место только одно (VI; 2).

Аксиома VIII. $AB|CD \cdot AC|BE : \circ \cdot AC|DE$.

(Одновременное существование двух первых разделений влечет за собой третье).

Обращаем внимание читателя, что в разделениях левой части первая буква — общая, а две последующих меняются местами; в правой же части первой парой служит первая пара одного из данных разделений, а вторая пара составлена из их последних букв.

5. При тех же условиях имеем $AB|DE$.

Действительно, разделения левой части можно переставить и применить к ним аксиому VIII.

6. Если одновременно имеют место $AB|CD$ и $AB|CE$, то не имеет места $AB|DE$.

В самом деле, можно считать, что т. E и D — различны; тогда на основании аксиомы VII, по отношению к т. A , C , D , E имеем: или $AC|DE$, или $AD|CE$, или $AE|CD$.

Рассмотрим отдельно все три предположения:

- 1) $AC|DE \cdot \equiv \cdot CA|DE$ (теорема I)
- $AB|CD \cdot \equiv \cdot CD|AB$ (теорема I)
- $CD|AB \cdot CA|DE : \circ \cdot CA|BE$ (VIII)
- $CA|BE \cdot \equiv \cdot AC|BE$ (теорема I),

но это последнее разделение несовместимо с данным $AB|CE$ (аксиома VI), так что случай I отбрасывается.

2) Имеем:

$$DC|AB \cdot DA|CE : \circ \cdot DA|BE \text{ (I; VIII)}$$

$$DA|BE \cdot \equiv \cdot AD|BE,$$

а это исключает $AB|DE$ (аксиома VI), ч. и т. д.

3) В предыдущем рассуждении переставляем точки D и E .

7. $AB|CD \cdot AC|BE : \circ \cdot CD|BE$.

Действительно, на основании аксиомы VIII и теоремы 5, имеем:

$$AC|DE \text{ и } AB|DE,$$

или

$DE|AC$ и $DE|AB$ (теорема 1);

но тогда невозможно разделение $DE|BC$ (теорема 6).

Следовательно, для т. B, C, D, E (по аксиоме VII) возможны лишь два случая:

$BD|CE$ или $BE|CD$.

В первом случае пишем:

$$EC|DB \cdot ED|CA : \circ \cdot EC|BA; \quad (5)$$

но эта формула несовместима с данной $AC|BE$, так что остается лишь второй случай, который и доказывает теорему.

Для дальнейших рассуждений возьмем две различные т. K и L и еще две другие т. M и N , так что

$KL|MN$ (аксиома II).

Определение 2. Совокупность точек X , для которых имеет место разделение $KL|MX$, обозначается символом:

$$(KL)_M.$$

Если к этой совокупности присоединить еще т. K и L , то получим отрезок $[KL]_M$. Подобное же значение имеют символы $(KL)_N$ и $[KL]_N$.

Отрезки $[KL]_M$ и $[KL]_N$ при наличии условия $KL|MN$ называются взаимно-дополнительными.

Из сделанного определения, в связи с теоремой 1, между прочим вытекает, что порядок точек K и L в символе отрезка значения не имеет.

8. Совокупности $(KL)_M$ и $(KL)_N$ не имеют общих точек.

Действительно, в противном случае имели бы:

$$KL|MX \text{ и } KL|NX;$$

но тогда разделение $KL|MN$ было бы невозможно (6) что противоречит заданию.

9. Для определения отрезка безразлично, какую из внутренних точек дополнительного отрезка принять за вспомогательную.

В самом деле, докажем, что если т. H принадлежит совокупности $(KL)_N$, то совокупности $(KL)_M$ и $(KL)_H$ — тождественны. Из данных разделений $KL|NH$ и $KL|MN$ вытекает невозможность $KL|MH$ (6), так что для т. K, L, M, H возможны лишь два случая (VII):

$$KM|LH \text{ или } KH|LM.$$

Если теперь т. X принадлежит $(KL)_M$, так что $KL|MX$, то в указанных двух случаях соответственно имеем:

$$\left. \begin{array}{l} KM|LH \cdot KL|MX : \circ \cdot KL|HX \\ LM|KH \cdot LK|MX : \circ \cdot LK|HX, \end{array} \right\} \quad (\text{VIII})$$

т. е., всегда т. X принадлежит $(KL)_H$.

Обратное утверждение доказывается подобным же образом, а отсюда и следует искомое тождество.

10. Если дано:

$$KL|MN \cdot KL|PQ,$$

то т. P, Q суть внутренние точки различных взаимно-дополнительных совокупностей

$$(KL)_M \text{ и } (KL)_N.$$

Действительно, на основании аксиомы VII, для т. K, L, M, P (предполагая, что P отлично от M) имеем три случая:

$$1) KL|MP;$$

тогда P принадлежит классу $(KL)_M$.

$$2) KM|LP;$$

тогда

$$KM|LP \cdot KL|MN : \circ \cdot KL|PN,$$

т. е. P принадлежит классу $(KL)_N$.

$$3) LM|KP;$$

в предыдущем рассуждении переставляем буквы K и L .

Итак, P всегда принадлежит одной из указанных совокупностей; то же самое докажем и для точки Q . Если же допустить, что эти точки принадлежат одной и той же совокупности, то теорема 6 приведет к противоречию с заданием.

11. Две различные точки K и L определяют два и только два взаимно-дополнительных отрезка.

В самом деле, на основании аксиомы II и определения 2, данные точки определяют отрезки $[KL]_M$ и $[KL]_N$. Пусть имеются еще две такие точки P и Q , что

$$KL | PQ;$$

тогда получаются два новых отрезка $[KL]_P$ и $[KL]_Q$. Но теоремы 10 и 9 показывают, что здесь мы приходим к тем же самым классам.

Основываясь на предыдущих теоремах, можно далее вывести другие свойства отрезков, относящиеся до принадлежности одних классов другим. Но мы ограничимся приведенными примерами аксиоматических доказательств и, ради экономии времени и места, не будем разбирать дальше указанных свойств отрезков тем же самым методом. Сами по себе все эти теоремы интуитивно очевидны: стоит только представить себе окружность (в обыкновенном евклидовом пространстве) и рассмотреть те две дуги ее, на которые делят ее две любые точки. Объясняется это тем, что для точек окружности имеют место формулированные выше аксиомы эллиптической геометрии; „разделение двух пар точек“ понимается при этом обычным способом (так, на черт. 1 имеем $AB | CD$).

Изучив свойства отрезка, можно перейти к определению прямой линии.

О п р е д е л е н и е 3. Прямая KL есть класс точек, состоящий из обоих взаимно-дополнительных отрезков $[KL]$.

Прямые обозначаются также с помощью малых букв латинского алфавита.

Определение прямой показывает, что ее свойства можно вывести из доказанных уже свойств отрезка: так, можно доказать следующие три теоремы:

12. Две различные точки всегда определяют одну и только одну прямую (теорема 11, опр. 3).

13. Если P и Q различные точки, принадлежащие прямой KL , то прямые KL и PQ — тождественны (12).

14. Если A, B, C, D — четыре различные точки некоторой прямой, то всегда имеет место одно и только одно из разделений:

или $AB|CD$, или $AC|BD$, или $AD|BC$ (опр. 3, VII, 4).

Для дальнейшего важно еще отметить следующее предложение:

[15] Если A, B, C, X и Y — различные точки некоторой прямой, то пара X, Y или разделяет две пары, образованные из точек A, B, C , или ни одной.

В самом деле, возьмем т. X, Y за точки, определяющие данную прямую (13); тогда возможны лишь два случая: или две из числа точек A, B, C принадлежат одному и тому же классу (XY) а третья — другому, или все три точки принадлежат одному и тому же классу (XY). Далее, из свойств отрезка вытекает, что $XY|AB$ имеет место тогда и только тогда, когда т. A и B принадлежат различным классам (XY) и т. д.

Высказанные до сих пор восемь аксиом не исключают возможности, что все „пространство“ исчерпывается точками одной прямой; поэтому если мы желаем выйти за пределы прямой, то необходимо принять следующую аксиому:

Аксиома IX. Существует точка, не принадлежащая данной прямой.

Не представит труда доказать теперь существование бесконечного множества различных прямых.

Определение 4. Дана прямая a и т. A вне ее; совокупность прямых, определяемых точкой A и всевозможными точками прямой a , называется пучком, т. A — его центром, пр. a — его направляющей.

Определение 5. Совокупность точек, принадлежащих прямым данного пучка, называется плоскостью.

Такая плоскость обозначается с помощью символа aA или Aa ; плоскости обозначаются также малыми буквами греческого алфавита.

Определение 6. Если A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, то совокупность трех прямых AB, BC, CA называется трехсторонником, а данные точки — его вершинами.

Следующая аксиома дает возможность вывести основные свойства плоскости и доказать основную особенность геометрии Римана, а именно — отсутствие непересекающихся прямых, лежащих в одной плоскости:

Аксиома X. *Прямая, пересекающая какие-либо две прямые данного трехсторонника не в их общей вершине, пересекает и третью его прямую.*

16. Если различные т. K и L обе принадлежат плоскости aA , то прямые KL и a пересекаются.

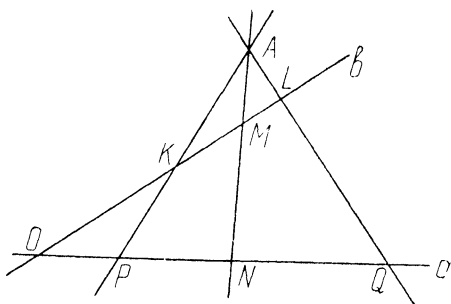
Определение плоскости показывает, что достаточно остановиться на том случае, когда т. A, K, L образуют трехсторонник и когда т. K и L не лежат на прямой a (черт. 2). Следовательно, пр. a пересекает прямые AK и AL (опр. 5 и 4) в точках, отличных от данных; тогда в силу аксиомы X, пр. a должна пересечь и прямую KL .

17. Если две различные точки прямой принадлежат плоскости, то прямая всеми своими точками принадлежит этой плоскости.

Пусть две т. K и L прямой b принадлежат плоскости aA и пусть прямые a и b пересекаются в т. O (16, черт. 2). Мы можем допустить, что прямая b отлична от a и не проходит через т. A , так как эти случаи решаются непосредственно на основании определения 5. Возьмем на пр. b какую-нибудь точку M и опять-таки будем считать, что она отлична и от K , и от L , и от O . Далее, по крайней мере, одна из точек K и L отлична от O ; пусть, именно, т. K не

совпадает с O . Тогда можно говорить о трехстороннике OKP , где P — точка пересечения прямых AK и a . Применяя к нему и к прямой AM аксиому X , убеждаемся, что пр. AM пересечет пр. OP (или a) в некоторой т. N ; следовательно, т. M принадлежит плоскости aA (опр. 5), ч. и т. д.

18. Если прямая b принадлежит плоскости aA и не проходит через точку A , то плоскости aA и bA — тождественны.



Черт. 2.

Так как все точки прямой b принадлежат плоскости aA , то прямые a и b пересекаются в т. O (16), и эта точка — единственна (12). Возьмем на пр. b какую-нибудь точку K , отличную от O , и отметим т. P , которая является пересечением прямых AK и a (ее существование вытекает из самого определения плоскости). Прямые AO и AK очевидно принадлежат обоим пучкам aA и bA . Возьмем теперь какую-нибудь прямую x , проходящую через т. A и отличную от обеих только-что названных. Применяя аксиому X к пр. x и трехстороннику OKP , убеждаемся, что если x пересекает одну из пр. a и b , то она пересечет и другую, откуда и следует теорема.

Подобными же рассуждениями можно доказать различные случаи определяемости плоскости при помощи задания некоторых ее точек и прямых; эти теоремы

известны нам из евклидовой геометрии, как например:

19. Три точки, не лежащие на одной прямой, определяют одну и только одну проходящую через них плоскость (отсюда вытекает обозначение плоскости с помощью трех больших букв).

Основная особенность эллиптической геометрии находит свое выражение в следующей теореме:

20. Две различные прямые, лежащие в одной плоскости, всегда пересекаются в одной и только в одной точке.

В самом деле, пусть даны пр. a и b ; отметим на второй прямой какую-нибудь точку B . Если B принадлежит a , то эта точка и будет искомой; в противном случае данная плоскость есть пл. aB (см. сделанные выше замечания) и тогда пр. b пересекает пр. a (опр. 5 и 4). Единственность общей точки вытекает из теоремы 12.

Переходим к определению угла; здесь придется ввести новую аксиому. Сначала укажем следующую простую теорему:

21. Между прямыми пучка и точками любой прямой, лежащей в плоскости пучка, но ему не принадлежащей, можно установить одно-однозначное соответствие.

Для доказательства достаточно считать соответственными элементы, совмещенные друг с другом (см. 20)

Аксиома λI . Если четыре прямых пучка пересекают две какие-нибудь прямые соответственно в точках A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1 , и если имеет место разделение $AB|CD$, то всегда имеет место также разделение $A_1B_1|C_1D_1$.

Определение 7. Мы говорим, что прямые a, b, c, d , принадлежащие одному и тому же пучку, находятся в отношении $ab|cd$ тогда и только тогда, когда т. A, B, C, D пересечения их какой-либо прямой образуют разделение $AB|CD$.

(Аксиома XI показывает, что выбор вспомогательной прямой безразличен).

Таким образом „разделение пар“ для прямых всецело сводится к такому же отношению для точек. В силу определения 7 о „разделении пар“ для четырех данных прямых можно говорить только тогда, когда все они принадлежат одному пучку; точно также 4 точки могут образовать „разделение пар“ лишь в том случае, если все они лежат на одной прямой: формула $AB|CD$ влечет за собой, что т. C и D принадлежат взаимно-дополнительным совокупностям (AB) , а следовательно, и прямой AB .

Предыдущее замечание показывает, что изученные выше свойства отношения „разделение двух пар“ переносятся на прямые пучка, и определение угла дается совершенно тем же путем, который был применен для отрезков; придется только термин „точка“ заменить на „прямая пучка“ (и соответственно этому — большие буквы на малые).

Определение 8. Возьмем две различные прямые k и l некоторого пучка с центром в O и еще две другие его прямые m и n , так чтобы $kl|mn$. Совокупность прямых x , для которых имеет место разделение $kl|mx$, обозначается символом:

$$(kl)_m.$$

Если сюда присоединить сами прямые k и l , то получим угол:

$$[kl]_m.$$

Углы $[kl]_m$ и $[kl]_n$ называются взаимно-дополнительными или смежными (для углов применяются также обычные обозначения:

$$\angle KOL \text{ или } \angle O).$$

Вспоминая определение 7, непосредственно приходим к предложению:

22. Если прямые k, l, m, x некоторого пучка пересекают какую-либо прямую соответственно в точках K, L, M, X , то пр. x принадлежит совокупности $(kl)_m$ тогда и только тогда, когда т. X принадлежит совокупности $(KL)_M$.

Определение 9. Сохраняя предыдущие обозначения, назовем отрезок $[KL]_M$ секущим отрезком угла $[kl]_m$.

22 сейчас же позволяет сказать, что углу $[kl]_m$ принадлежат те и только те прямые, которые пересекают его секущий отрезок. Таким образом между прямыми угла и точками его секущего отрезка устанавливается однозначное соответствие, которое в свою очередь позволяет свойства отрезка перенести на угол.

Подчеркнем здесь еще раз, что в эллиптической геометрии элементом угла является полная прямая и что две прямые, пересекающиеся в точке O , делят пучок O (а следовательно и некоторую плоскость) лишь на две части. Это деление обладает обычными свойствами (например, каждый из отрезков, определяемых двумя точками различных частей, содержит по одной точке пересечения со сторонами угла) и на доказательстве их мы не будем останавливаться.

Здесь уместно будет прибавить, что одна прямая не разлагает эллиптической плоскости на две отдельные части. Это вытекает из того, что две точки определяют два отрезка, между которыми мы сейчас не можем провести никакого различия, и всегда один из указанных отрезков пересекается с данной прямой, а другой с ней не пересекается; поэтому и невозможно воспользоваться тем признаком, который решает вопрос в геометриях Евклида и Лобачевского.

Мы переходим к определению треугольника; здесь придется встретиться с одной особенностью эллиптиче-

ской геометрии, сообщающей ее построению особый отпечаток.

23. Дан трехсторонник KLM и в плоскости KLM еще две точки P и Q , не лежащие на прямых трехсторонника; тогда или т. P и Q обе принадлежат одному и тому же углу при каждой из т. K, L, M , или это имеет место только для одной из вершин, а для двух других т. P и Q принадлежат взаимно-дополнительным углам.

В самом деле, пусть пр. PQ пересекает пр. KL, LM, MK соответственно в т. M_1, K_1, L_1 , отличных от вершин трехсторонника; углы при т. K, L, M могут иметь, в качестве своих секущих отрезков, соответственно отрезки $[L_1M_1], [M_1K_1], [K_1L_1]$. Легко видеть, что принадлежность точек P и Q различным углам или одному и тому же углу при т. K связана с существованием или с несуществованием разделения $PQ | L_1M_1$. Подобное же имеет место при двух других вершинах, и тогда теорема 15 решает вопрос. Если же пр. PQ проходит через одну из т. K, L, M , то рассуждение значительно упрощается.

24. Дан трехсторонник KLM . Если какая-либо точка лежит внутри наперед заданных углов при двух его вершинах, то она лежит внутри вполне определенного угла при третьей вершине.

Два указанных в теореме угла можно задать, отметив какую-либо общую им точку (как пересечение двух прямых, принадлежащих соответственно данным углам); эта точка вполне определяет тот угол при третьей вершине, которому она принадлежит. Если теперь дана любая точка, удовлетворяющая условию нашего предложения, то предыдущая теорема решает вопрос.

25. Дан трехсторонник KLM ; всякая точка плоскости KLM , не лежащая на прямых трехсторонника, принадлежит одной и только одной из четырех частей, из которых каждая определяется как совокупность точек, лежа-

щих внутри наперед заданных углов при двух вершинах трехсторонника.

При каждой вершине имеется два угла, так что число комбинаций углов при двух вершинах и будет равно четырем; для дальнейшего остается сослаться на теорему 24.

О п р е д е л е н и е 10. Дан трехсторонник KLM ; совокупность точек, лежащих внутри определенных углов при двух вершинах его, называется совокупностью внутренних точек треугольника KLM ; углы при т. K, L, M , внутри которых лежат рассматриваемые точки, называются углами треугольника; те отрезки $[LM]$, $[MK]$, $[KL]$, которые служат секущими отрезками этих углов, называются сторонами треугольника. Совокупность точек, состоящая из внутренних точек треугольника KLM и точек его сторон, называется треугольником KLM . Остальные термины, связанные с треугольником, вводятся обычным образом.

26. Три точки, не лежащие на одной прямой, определяют четыре различных треугольника (25 и опр. 10).

27. Для полного определения одного из четырех треугольников KLM необходимо указать, какие именно углы при двух из его вершин являются углами треугольника, или указать, какие именно отрезки на двух прямых трехсторонника KLM служат сторонами треугольника, или сделать это для какого-нибудь угла и прилежащей стороны.

Действительно, первое утверждение вытекает из определения 10 и теоремы 25; оба же последних — из того, что задание стороны вполне определяет противолежащий угол, для которого она служит секущим отрезком.

28. Если углы и стороны одного определенного треугольника KLM обозначим через угол K , $[LM]$ и т. д., а совокупности, взаимно-дополнительные с ними, будем обозначать посредством приставки „доп.“, то элементы всех

четырёх треугольников KLM даются следующей таблицей:

- 1) $\angle K$, $\angle L$, $\angle M$; $[LM]$, $[MK]$, $[KL]$
- 2) $\angle K$, доп. $\angle L$, доп. $\angle M$; $[LM]$, доп. $[MK]$, доп. $[KL]$
- 3) доп. $\angle K$, $\angle L$, доп. $\angle M$; доп. $[LM]$, $[MK]$, доп. $[KL]$
- 4) доп. $\angle K$, доп. $\angle L$, $\angle M$; доп. $[LM]$, доп. $[MK]$, $[KL]$.

В самом деле, мы знаем, что треугольник KLM вполне определяется заданием его углов при т. K и L ; получаются четыре случая, которые и даются двумя первыми столбцами нашей таблицы. Определение третьего угла M происходит по указанию теоремы 23, а стороны находятся как секущие отрезки этих углов.

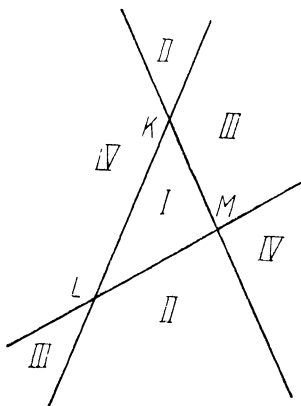
Сопоставляя попарно полученные четыре треугольника, приходим к предложению:

29. У любых двух треугольников KLM имеется по одному общему углу и по одной общей стороне, противолежащей этому углу; остальные же одноименные углы и стороны их — взаимно-дополнительны.

Определение 11. Два треугольника KLM с общим углом при т. K называются дополняющими друг друга до угла K .

На черт. 3 изображены все четыре треугольника KLM , обозначенные римскими цифрами I, II, III, IV; для нашей интуиции пространства, воспитанной на евклидовой геометрии, треугольник I резко отличается от остальных. Но с точки зрения эллиптической геометрии, все эти четыре треугольника играют совершенно одинаковую роль.

То обстоятельство, что в эллиптической геометрии три



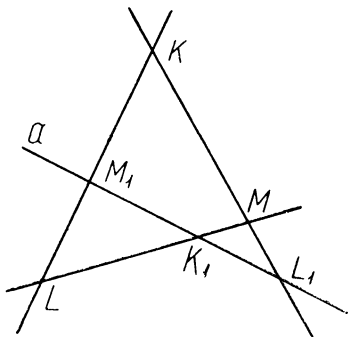
Черт. 3.

точки определяют четыре треугольника, значительно усложняет ее построение: мало назвать треугольник KLM , надо еще указать, с каким именно треугольником из четырех мы имеем дело. Забегая несколько вперед, укажем, что такое положение дел скажется на применении обычных теорем о равенстве треугольников. Пусть, именно, даны две тройки точек K, L, M и K_1, L_1, M_1 , каждая — не на одной прямой; и пусть один из двух отрезков $[KL]$ равен одному из отрезков $[K_1L_1]$, и тоже самое имеет место для отрезков $[LM]$ и $[L_1M_1]$, $[MK]$ и $[M_1K_1]$. Существуют ли при этих условиях треугольники KLM и $K_1L_1M_1$, равные по трем сторонам? Дело в том, что мы можем определить треугольник KLM по известным образом выбранным сторонам $[KL]$ и $[LM]$; точно также можно определить треугольник $K_1L_1M_1$ по сторонам $[K_1L_1]$ и $[L_1M_1]$, соответственно равным вышеуказанным; но тут возникает вопрос, будут ли в этих треугольниках стороны $[MK]$ и $[M_1K_1]$ тоже равными, или одна из них будет взаимно-дополнительной с отрезком, равным другой стороне. Для решения подобных вопросов, которым обыкновенно мало уделялось внимания, надо владеть теоремами, которые позволили бы по одним элементам треугольника определять другие. Для того, чтобы получить искомые теоремы, начнем с доказательства, что в эллиптической геометрии имеет место предложение, известное под именем „постулата Паша“.

30. Пусть прямая a принадлежит плоскости KLM , но не проходит ни через одну из точек K, L, M ; если пр. a пересекает одну из сторон определенного треугольника KLM , то она пересекает еще одну и только одну из двух остальных его сторон.

Положим, пр. a пересекает сторону $[KL]$ во внутренней ее точке M_1 ; эта прямая непременно пересечет и пр. KM в некоторой точке L_1 . Если L_1 принадлежит стороне $[KM]$, то другая точка пересечения найдена. Пусть теперь L_1

принадлежит отрезку, взаимно-дополнительному с $[KM]$ (черт. 4); тогда один из отрезков $[L_1M_1]$ будет секущим для угла K и у него окажется общая точка K_1 со стороной $[LM]$ (утверждение это вытекает из свойств углов, относящихся к делению плоскости на две части). Итак, и в этом случае найдена вторая точка пересечения прямой a с обводом треугольника KLM . Попробуем теперь допустить, что пр. a пересекает все три стороны данного треугольника; тогда эта прямая пересекает только одну сторону треугольника KLM , дополняющего данный до одного из его углов, а это противоречит только-что доказанному (о существовании двух общих точек).



Черт. 4.

Теперь можно перейти к предложению, имеющему в намеченном выше вопросе основное значение; встречающееся здесь понятие „трансверсаль“ определяется обычным образом.

31. Дан треугольник KLM и точка K_1 внутри стороны $[LM]$; среди четырех треугольников KK_1L имеется такой, у которого:

- сторона $[LK_1]$ есть часть стороны $[LM]$ данного;
- „ $[KK_1]$ есть трансверсаль данного;
- „ $[KL]$ тождественна со стороной $[KL]$ данного;
- $\angle L$ тождествен с углом L данного;
- $\angle LKK_1$ есть часть угла K данного.

Действительно, определим один из треугольников KK_1L по стороне $[LK_1]$, которая служит частью стороны $[LM]$ данного, и по стороне $[KK_1]$ — трансверсали данного. Тогда наши утверждения об углах LKK_1 и L оправды-

ваются непосредственно. Переходим к рассмотрению стороны $[KL]$, и с этой целью возьмем внутри отрезка $[KK_1]$ какую-нибудь точку N ; прямая MN в силу теоремы 30, должна пересечь одну из двух остальных сторон треугольника KLK_1 во внутренней точке. Но т. M не может лежать внутри стороны $[LK_1]$, а потому пр. MN пересекает сторону $[KL]$ нового треугольника. С другой стороны, пр. MN принадлежит углу M данного треугольника, а потому пересекает его противолежащую сторону $[KL]$. Отсюда и вытекает тождественность обеих сторон.

Из доказанной теоремы выводим другие, которые весьма полезны при аксиоматическом построении эллиптической геометрии; в качестве примера приведем два предложения, опустив ради экономии места их доказательства.

32. Пусть у треугольников KLM и KPQ сторона $[KP]$ содержит сторону $[KL]$ или содержится в ней, и подобное же соотношение имеет место между сторонами $[KQ]$ и $[KM]$; тогда углы при т. K в обоих треугольниках — тождественны.

33. Пусть у треугольников KLM и KPQ сторона $[KP]$ содержит сторону $[KL]$ или содержится в ней, а сторона $[KQ]$ содержит доп. $[KM]$ или содержится в этом отрезке; тогда углы при вершине K в этих треугольниках будут взаимно-дополнительными.

От треугольника естественно перейти к выпуклым многоугольникам вообще. Теория их в эллиптической геометрии имеет некоторые своеобразные черты, но в общем складывается так же, как и в геометрии Евклида. На этом основании мы не будем входить в большие подробности, а ограничимся упоминанием о некоторых интересных особенностях.

Обвод треугольника представляет пример замкнутой ломаной четного типа, которая пересекается каждой прямой, не проходящей через ее вершины, в четном числе

точек (нуль в том числе). Если одну из сторон треугольника заменить взаимно-дополнительным отрезком, то получим так называемый трехотрезник, служащий примером замкнутой ломаной нечетного типа: всякая прямая, не проходящая через его вершины, пересекает его в нечетном числе точек (все эти утверждения без труда выводятся из постулата Паша).

Далее, если дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, то существуют еще два выпуклых четырехугольника с теми же вершинами, но при иной последовательности их: эти три четырехугольника исчерпывают плоскость. Но если число сторон больше четырех, то уже нельзя получить выпуклого многоугольника с теми же вершинами, но расположив их в другом порядке.

Для перехода в пространство трех измерений вводится новая аксиома:

Аксиома XII. Существует точка, не принадлежащая данной плоскости.

Установив затем существование бесконечного множества плоскостей, прямых и точек, определяем обычным образом понятия о скрещивающихся прямых, о пучке плоскостей и о связке.

Если мы намерены ограничиться пространством трех измерений, то вводим следующую аксиому:

Аксиома XIII. Если две плоскости имеют общую точку, то у них есть по крайней мере еще одна общая точка.

34. Если плоскость не проходит через вершины треугольника и пересекает одну из его сторон, то она пересечет еще одну и только одну из двух остальных его сторон.

Нетрудно доказать (по обычному способу и при помощи аксиомы XIII), что данная плоскость пересекается с пло-

скостью треугольника по прямой; тогда дело сводится к постулату Паша.

35. Если прямая не лежит в плоскости, то они всегда пересекаются в одной и только в одной точке.

Пусть нам даны пр. a и пл. α ; возьмем в последней какую-нибудь точку A . Если A принадлежит a , то уже получена общая точка; в противном случае берем плоскость αA , которая пересекается с α по прямой b , и дело сводится к ссылке на теоремы 20 и 17.

36. Две различные плоскости всегда пересекаются по прямой и других общих точек не имеют.

Действительно, возьмем две различные т. A и B в одной плоскости, а т. C в другой. Если C принадлежит и первой плоскости, то предложение вытекает из аксиомы XIII, теорем 12, 17, 19. В противном случае можно говорить о плоскости ABC , которая пересекает данные по прямым a и b ; эти прямые имеют общую точку (20), и придется повторить предыдущие ссылки.

С целью ввести понятие о двугранном угле, отметим сначала, что между плоскостями пучка и точками прямой скрещивающейся с его осью, можно установить одно-однозначное соответствие; далее переходим к следующей теореме:

37. Дан пучок плоскостей и две прямые, скрещивающиеся с его осью; пусть четыре какие-нибудь плоскости пучка пересекают данные прямые соответственно в точках A, B, C, D и A', B', C', D' ; тогда, если имеет место разделение $AB|CD$, то имеет место также $A'B'|C'D'$.

Пусть осью пучка служит пр. t , а данные прямые будут a и a' . Возьмем на оси две различные точки M и M' и рассмотрим плоскости aM и $a'M'$; они пересекаются по прямой b (36), скрещивающейся с t , ибо иначе т. M и M' совпали бы. Пусть данные четыре плоскости пересекают прямую b в точках A'', B'', C'', D'' . Далее, плоскости aM и $a'M'$ пересекаются с этими четырьмя

плоскостями соответственно по прямым MA , MB , MC , MD и $M'A'$, $M'B'$, $M'C'$, $M'D'$; прямые MA и $M'A'$ должны пересекаться в точке, лежащей на прямой b , и в то же самое время — на одной из данных плоскостей; ясно что точкой пересечения послужит A'' . Точно также прямые MB и $M'B'$, MC и $M'C'$, MD и $M'D'$ пересекаются соответственно в точках B'' , C'' , D'' . Теперь остается только двукратно применить аксиому XI.

Определение 12. Мы говорим о четырех плоскостях α , β , γ , δ какого-либо пучка, что первая пара разделяет вторую, и пишем $\alpha\beta | \gamma\delta$ тогда и только тогда, когда точки их пересечения A, B, C, D с какой-нибудь прямой, скрещающейся с осью пучка, образуют разделение $AB | CD$.

Теперь уже нетрудно сообразить, как складывается учение о „разделении пар“ для плоскостей и как вводится понятие о двугранном угле.

Желая теперь перейти к телесным углам, мы прежде всего убеждаемся, что между образами связки с центром в т. S и образами плоскости α , не проходящей через S , без труда устанавливается одно-однозначное соответствие; при этом соответственными будут:

прямая связки . . . точка плоскости

плоскость прямая

двугранный угол . . угол

угол отрезок,

причем сохраняется отношение „разделение пар“ между соответствующими элементами.

После этого мы можем определить **трегранный угол** как образ связки, соответствующий треугольнику в плоскости; легко видеть, что три плоскости, не принадлежащие одному и тому же пучку, делят все пространство на четыре трегранных угла. Взяв вместо треугольника многоугольник, придем к понятию **многогранного угла**; указанное соответствие позволит изучить основные свойства новых фигур.

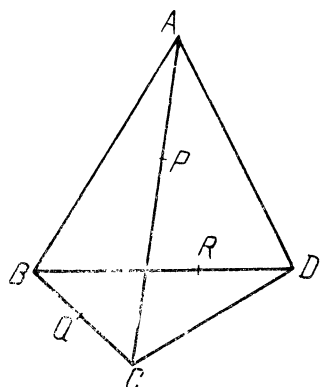
Продолжая построение основных геометрических фигур в порядке возрастающей сложности, мы подходим к определению тетраэдра. Начнем со следующей теоремы, которая оказывает большую помощь там, где приходится разбираться в элементах треугольников, образующих неплоскую фигуру:

38. Если даны четыре т. A, B, C, D не лежащие в одной плоскости, и если определить какие-либо два из четырех треугольников:

$$ABC, BCD, CDA, DAB,$$

так чтобы одноименная сторона была одним и тем же отрезком, то все 4 треугольника определяются с соблюдением указанного условия.

В самом деле возьмем два первых треугольника и определим их так, чтобы сторона $[BC]$ была одним и тем же отрезком; кроме того отрезки $[AB]$, $[AC]$, $[BD]$, $[CD]$ вполне определятся как стороны выбранных треугольников.



Черт. 5.

Если теперь определить треугольник CDA по только-что указанным отрезкам $[AC]$ и $[CD]$, то по отношению к двум первым треугольникам он удовлетворит поставленному требованию. Точно так же обстоит дело с треугольником DAB , определенным по отрезкам $[AB]$ и $[BD]$. Остается рассмотреть, определяется ли сторона $[AD]$ одинаковым образом в двух последних треугольниках. С этой целью, возьмем т. P, Q, R , соответственно внутри сторон $[AC]$, $[BC]$, $[BD]$ (черт. 5), и проведем плоскость PQR . Применяя теорему 34, приходим к следующим заключениям: пл. PQR в треугольнике BCD не

пересекает стороны $[CD]$, а потому в треугольнике CDA должна пересечь $[AD]$ в некоторой точке U ; далее в треугольнике ABC наша плоскость не пересекает стороны $[AB]$, а потому в треугольнике DBA она должна пересечь $[AD]$ в точке, которая неизбежно совпадает с U . Таким образом, одна и та же т. U принадлежит отрезкам $[AD]$, определенным из двух различных треугольников; следовательно, указанные отрезки тождественны, ч. и т. д.

Определение 13. Такое сочетание четырех треугольников называется четырехгранною поверхностью.

Исходя из возможности различных определений для двух первоначально взятых треугольников, нетрудно доказать, что 4 точки, не лежащие в одной плоскости, определяют 8 различных четырехгранных поверхностей.

Действительно, при выбранном отрезке $[BC]$ каждый из треугольников ABC и BCD можно задать двояко, да и сам отрезок $[BC]$ допускает двоякий выбор.

Если читатель разберется во всех этих комбинациях, то без труда придет к выводу: для того, чтобы из данной четырехгранной поверхности $ABCD$ получить все остальные, имеющие те же вершины, надо или заменить на взаимно-дополнительные отрезки какие-нибудь три ребра, сходящиеся в одной вершине, оставив остальные ребра без изменения, или же сделать указанную замену с двумя парами скрещивающихся ребер, оставив без изменения третью пару. Соответственно этому изменяются и углы.

Если в четырехгранной поверхности отбросить пару сторон, принадлежащих скрещивающимся прямым, то получаем косоугольный четырехугольник, который играет известную роль в некоторых теориях эллиптической геометрии; так например, если отбросить стороны $[AC]$ и $[BD]$ (черт. 5), то получается косоугольный четырехугольник $ABCD$; отброшенные отрезки называются его диагоналями. Свойства косоугольного четырехугольника получаются без труда из свойств четырехгранной поверхности.

Возвращаясь к этой последней, мы вводим в исследование трехгранные углы при ее вершинах; точки, общие указанным трехгранным углам, приводят нас к понятию о тетраэдре. Таким образом 4 точки, не лежащие в одной плоскости, определяют 8 тетраэдров, исчерпывающих все пространство; они разбиваются на пары тетраэдров, дополняющих друг друга до одного из трехгранных углов. Но имеются и такие пары тетраэдров, которым общи лишь два двугранных угла со скрещивающимися ребрами; чтобы от одного такого тетраэдра перейти к другому, понадобится двукратный переход к тетраэдру, дополняющему данный до некоторого трехгранного угла.

В дальнейшие подробности общей теории выпуклых многогранников мы не намерены здесь вдаваться, так как при некоторых своеобразных чертах своих она не приводит к заключениям, долженствующим быть особо подчеркнутыми.

Наш очерк геометрии положения подходит к концу; однако для ее завершения надо высказать аксиому непрерывности, которая хотя и имеет наиболее интересные приложения в геометрии меры, но по своему содержанию принадлежит геометрии положения:

Аксиома XIV. Дан отрезок $[AB]_M$ и пусть его внутренние точки распределены на два класса, так что:

- 1) каждая точка принадлежит какому-либо классу;*
- 2) если точка X принадлежит первому классу, а Y — второму, то всегда X является внутренней точкой отрезка $[AY]_M$. Тогда на данном отрезке существует такая точка C , что всякая внутренняя точка отрезка $[AC]_M$ принадлежит первому классу, а всякая внутренняя точка отрезка $[CB]_M$ принадлежит второму классу.*

Нетрудно доказать (от противного), что указанная точка C — единственна, и перенести свойства непрерывности

на угол как совокупность прямых и на двугранный угол как совокупность плоскостей.

Введенные выше аксиомы I—XIV, на которых обосновывается эллиптическая геометрия положения, в то же время могут послужить для обоснования проективной геометрии. Но только иная точка зрения иначе направила бы и наши исследования: вместо того, чтобы изучать свойства отрезка, угла, треугольника и т. п., мы преимущественно имели бы дело с точками, полными прямыми и плоскостями; мы доказали бы своевременно теорему Дезарга, ввели бы понятие о гармонической группе и пошли бы по известному пути, указанному Штаудтом и разработанному его последователями Рейе и Энриквесом.

II. УЧЕНИЕ О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ РАВЕНСТВЕ.

Хотя в существенных чертах своих это учение складывается так же, как в геометриях Евклида и Лобачевского, однако соответственные аксиомы в эллиптической геометрии формулируются иначе; причина тому — замкнутость прямой.

Основное понятие: „равенство отрезков“. Названное отношение между отрезками обозначается обычным способом и характеризуется следующими аксиомами:

Аксиома XV. *Каждый отрезок равен самому себе.*

Аксиома XVI. *Если один отрезок равен другому, то последний равен первому.*

Аксиома XVII. *Если один отрезок равен второму, а второй равен третьему, то и первый равен третьему.*

В этих трех аксиомах высказаны существенные свойства всякого равенства, а именно: возвратность, взаимность и переносимость (транзитивность). В дальнейшем мы имеем дело уже со специальными свойствами равенства отрезков.

Аксиома XVIII. *Если два отрезка равны, то и взаимно-дополнительные с ними равны между собой.*

Аксиома XIX. *Отрезок не равен своей части.* (Здесь, конечно, идет речь о „настоящей“ части, отличной от целого).

Определение 14. Два взаимно-дополнительные отрезка, равные между собой, называются *полупрямыми*

(иногда мы будем пользоваться сокращением: „ппр.“); их общие концы называются противоположными точками.

Аксиома XX. Для каждой точки прямой существует на этой прямой противоположная точка.

Аксиома XXI. Все полупрямые равны между собой.

В пополнение аксиомы XX нетрудно доказать, что противоположная точка единственна; в противном случае аксиомы XXI и XIX приведут нас к противоречию.

Если даны две различные и непротивоположные точки A и B , то определяемые ими два отрезка $[AB]$ теперь можно различить: один — как содержащийся в ппр., другой — как содержащий ппр. Различение это стало возможным лишь при помощи понятий и предложений геометрии меры; однако и оно не имеет особо важного значения в эллиптической геометрии.

Аксиома XXII. Если отрезки $[AB]$ и $[A_1B_1]$ равны между собой и C есть внутренняя точка первого отрезка, то существует такая внутренняя точка C_1 на втором отрезке, что его части $[A_1C_1]$ и $[C_1B_1]$ соответственно равны частям $[AC]$ и $[CB]$ первого отрезка.

Опять-таки нетрудно установить единственность точки C_1 (иначе — противоречие с XIX).

39. Дан отрезок a , отличный от ппр., и на произвольной прямой указана точка K ; тогда на этой прямой существуют две и только две такие точки M и N , что один из отрезков $[KM]$ и один из отрезков $[KN]$ равны a .

Пусть сначала отрезок a содержится в ппр.; на основании аксиом XXI и XXII, на обоих ппр. $[KK']$ существует по точке M и N , так что части их $[KM]$ и $[KN]$ равны a ; допущение еще третьей такой точки сейчас же приведет к противоречию с аксиомой XIX. Если же отрезок a содержит ппр., то начинаем со взаимно-дополнительного отрезка и затем ссылаемся на аксиому XVIII.

Имея возможность „откладывать“ отрезки на любой прямой, можно перейти к их сравнению, т. е. к понятиям „больше“ и „меньше“; при этом нетрудно установить, что все так называемые „постулаты сравнения“ здесь выполняются.

Переходя к сложению отрезков, мы встретимся в эллиптической геометрии с тем ограничением, которое имеет место в евклидовой геометрии для углов, пока не сделано обобщения этого понятия: не всегда можно говорить о сумме данных углов. Точно также и здесь, благодаря замкнутости прямой, не всегда существует отрезок, являющийся суммой данных. Введя указанное ограничение, получаем обычное исчисление отрезков.

Отметим только следующие особенности:

40. Если A и B не суть противоположные точки, а A' и B' — точки им противоположные на пр. AB , то отрезки $[AB]$ и $[A'B']$, меньшие ппр., равны между собой.

Действительно, ппр. $[AA']$, содержащая т. B , равна ппр. $[BB']$, содержащей т. A' (XXI); но очевидно $[A'B] = [BA']$, а потому, по свойствам исчисления отрезков имеем:

$$[A'B'] = [BA],$$

ч. и т. д.

41. При условиях предыдущей теоремы, точки, противоположные точкам определенного отрезка $[AB]$, принадлежат равному ему отрезку $[A'B']$. Иначе аксиомы XXI и XIX привели бы нас к противоречию.

Переходя к углам, начинаем с определений:

Определение 15. Если на сторонах данного угла отметить точки, противоположные его вершине, то тот из определяемых ими отрезков, который является секущим для данного угла, называется отрезком, соотнесенным данному углу.

Определение 16. Два угла называются равными, если равны соотнесенные им отрезки.

Это определение позволяет перенести на углы те свойства равенства, которые были выражены в предложениях XV—XVIII, и обычным способом определить прямой угол и взаимно-перпендикулярные прямые. Легко видеть, что прямому углу будет соотнесена полупрямая, в силу чего все прямые углы равны между собой (самое существование прямого угла будет установлено при доказательстве последующих теорем).

Однако для завершения исчисления углов и вообще для учения о равенстве мы нуждаемся еще в одной аксиоме, которая и будет вообще последней в системе аксиом эллиптической геометрии:

Аксиома XXIII. Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ стороны:

$$[AB] = [A_1B_1] \text{ и } [AC] = [A_1C_1],$$

то равенство углов A и A_1 имеет место одновременно с равенством сторон $[BC]$ и $[B_1C_1]$.

Определение 17. Два треугольника называются равными, если стороны и углы их соответственно равны друг другу.

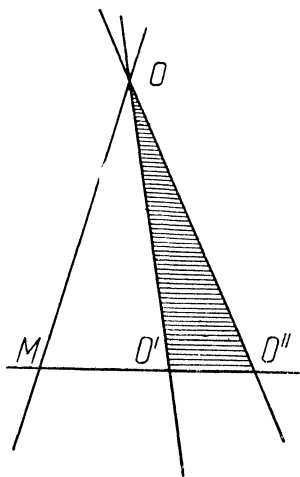
Из аксиомы XXIII непосредственно вытекают теоремы о равенстве треугольников по трем сторонам и по двум сторонам и углу между ними. Далее закладываются основы весьма важного для эллиптической геометрии учения о полюсах и полярах.

42. Если на двух различных прямых, пересекающихся в точке O , отметить точки O' и O'' , противоположные общей т. O , то прямая $O'O''$ будет перпендикулярна к обоим данным прямым.

В самом деле из четырех треугольников $OO'O''$ выберем два, дополняющих друг друга до определенного угла при O (на черт. 6 один из них заштрихован). Эти тре-

угольники будут равны, ибо угол O — общий, а стороны $[OO']$ и $[OO'']$ в обоих суть полупрямые; следовательно, углы при O' и O'' равны смежным с ними, ч. и т. д.

43. Если (при условиях и обозначениях предыдущей теоремы) на прямой $O'O''$ дана любая т. M , то пр. OM перпендикулярна к $O'O''$, и т. M — противоположна т. O на этой прямой.



Черт. 6.

Действительно возьмем два треугольника $OO'M$, дополняющих друг друга до определенного угла при O (черт. 6); так как здесь имеем: $[OO'] = \text{ппр.}$, $[O'M]$ — общая, углы при O'' — прямые, то эти треугольники равны. Отсюда следует, что углы при т. M — тоже прямые и что $[OM]$ равна взаимно-дополнительному отрезку т. е. $[OM] = \text{ппр.}$ Черт. 6 как будто бы не соответствует этим утверждениям; но ведь они вытекают из положенных в основу аксиом, а роль чертежа — ис-

ключительно вспомогательная (см. введение).

44. Геометрическое место точек, противоположных данной т. O и лежащих на прямых пучка с центром в O , есть прямая, к ним перпендикулярная.

В самом деле, взяв две прямые пучка, построим прямую $O'O''$ по указанию теоремы 42; теперь всякая прямая пучка O пересечет эту пр. $O'O''$ в точке, которая будет противоположной для O (теорема 43), и такая точка на каждой прямой единственна; следовательно пр. $O'O''$ и будет искомой.

Определение 18. Эта прямая называется полярной данной точки (в данной плоскости).

45. Угол не может быть равен своей части.

Действительно, отрезки, соотнесенные углу и его части, лежат оба на поляре его вершины, причем один из них будет частью другого; таким образом дело сводится к аксиоме XIX.

Владея этой теоремой, можно уже доказать случай равенства треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам, после чего продолжаем прерванное исследование.

46. Если две прямые перпендикулярны к третьей и лежат в одной плоскости, то точка их пересечения противоположна их основаниям.

Пусть $O'O$ и $O''O$ обе перпендикулярны к пр. $O'O''$ (черт. 6); берем два треугольника $OO'O''$, дополняющих друг друга до определенного угла при O ; сторона $[O'O'']$ у них общая, а углы O' и O'' — прямые, так что наши треугольники равны. Отсюда $[OO']$ и $[OO'']$ будут равны взаимно-дополнительным отрезкам, ч. и т. д.

47. Все прямые, лежащие в одной плоскости и перпендикулярные к данной в ней прямой, пересекаются в одной точке, которая противоположна их основаниям, и обратно: всякая прямая, проходящая через эту точку и лежащая в данной плоскости, будет перпендикуляром к данной прямой.

Возьмем какой-нибудь перпендикуляр; каждый из остальных пересекает его в точке, противоположной его основанию (46), а такая точка — единственна. Для обратного предложения придется пользоваться теоремой 43.

Определение 19. Эта точка пересечения перпендикуляров называется полюсом данной прямой (в данной плоскости).

Предыдущие теоремы и определения позволяют без труда доказать следующие три предложения:

48. Если пр. a есть поляр точки A , то A есть полюс прямой a (в плоскости aA) и обратно.

49. В плоскости aA полюсы прямых, проходящих через т. A , лежат на ее поляре a , и полярны точек, лежащих на пр. a , проходят через ее полюс A .

50. Поляры двух каких-нибудь точек прямой пересекаются в ее полюсе, и полюсы двух каких-нибудь прямых пучка определяют полярю его центра.

После изложенного можно закончить исчисление углов по образцу исчисления отрезков; от упомянутого выше ограничения можно избавиться, расширив подходящим образом понятия „угла“ и „отрезка“. Впрочем в последующем мы этими обобщениями почти не пользуемся; во все подробности учения о геометрическом равенстве тоже входить не будем. Важно отметить здесь одно существенное отличие эллиптической геометрии, а именно: так как два смежных угла теперь исчерпывают пучок, то в эллиптической геометрии так называемый „полный угол“ равен двум прямым углам (а не четырем).

Учение о полюсах и полярах приводит к важному преобразованию плоских фигур.

О п р е д е л е н и е 20. Полярностью в плоскости называется одно-однозначное соответствие между точками и прямыми этой плоскости, при котором точке соответствует ее поляр, а прямой — ее полюс.

Таким образом каждая фигура, состоящая из известных точек и прямых, преобразуется в другую, состоящую из их поляр и полюсов; однако проведение полярности в таком общем виде не приводит к интересным результатам (ниже это станет яснее). Поэтому мы введем дополнительные условия, которые нарушают единый принцип соответствия, зато полярность между отдельными образами явится плодотворным методом исследования.

В силу общего соответствия полярности, отрезку, как совокупности точек, соответствует угол, как совокупность прямых и обратно; это вытекает из того, что поляр точки M , лежащей на данной прямой, пересекает эту

прямую в т. M' , противоположной для M , а точки противоположные для точек некоторого отрезка, образуют тоже отрезок, равный данному (теоремы 40, 41; этот отрезок будет соотнесен искомому углу). Однако оказывается целесообразным считать полярными несколько иные образы.

Определение 21. Углом, полярным данному отрезку, называется угол, взаимно-дополнительный с тем углом, который соответствует данному отрезку в силу определения 20; подобным же образом определяется и отрезок, полярный данному углу.

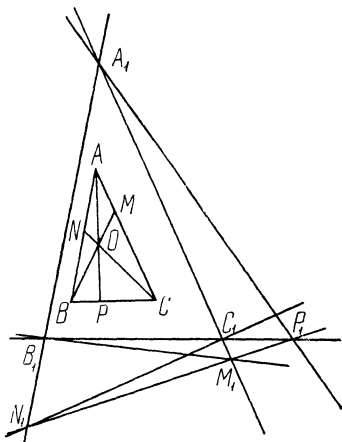
Из сказанного выше вытекает, что если два отрезка или угла равны, то и полярные им образы тоже равны между собою.

Центральное место занимает здесь теорема:

51. Для любого данного треугольника существует другой вполне определенный треугольник, так что вершины одного и прямые сторон другого, углы одного и стороны другого — взаимно полярны.

Действительно, пусть дан треугольник ABC ; строим поляры его вершин и обозначаем через A_1 пересечение поляр вершин B и C , через B_1 — пересечение поляр вершин A и C , через C_1 — пересечение поляр вершин A и B (черт. 7).

На основании теоремы 50, любой из треугольников $A_1B_1C_1$ выполняет первое требование рассматриваемого предложения. Чтобы удовлетворить и второму, выберем



Черт. 7.

определенный треугольник $A_1B_1C_1$, определяя его углы B_1 и C_1 согласно определению 21. Для этого внутри стороны $[AC]$ данного треугольника возьмем какую-нибудь точку M ; в силу полярности, ей соответствует прямая, проходящая через т. B_1 (49), и пусть эта прямая пересекает A_1C_1 в т. M_1 . Руководясь определением 21, за угол B_1 мы должны взять тот из двух, который не содержит прямой B_1M_1 ; другими словами, сторону $[A_1C_1]$ искомого треугольника $A_1B_1C_1$ надо определить как отрезок $[A_1C_1]_{M_1}$. Точно также сторона $[A_1B_1]$ этого треугольника определяется как отрезок $[A_1B_1]_{N_1}$ (см. черт. 7), и этим задается угол C_1 . Теперь треугольник $A_1B_1C_1$ вполне определен, причем сторона $[AC]$ и угол B_1 , сторона $[AB]$ и угол C_1 взаимно полярны. Далее, в силу полярности, прямой BM соответствует точка M_1 (49), так что угол B и отрезок $[A_1C_1]_{M_1}$ взаимно полярны; то же самое имеет место для угла C и отрезка $[A_1B_1]_{N_1}$.

Остается рассмотреть отношения между углом A_1 и стороной $[BC]$, углом A и стороной $[B_1C_1]$. С этой целью возьмем какую-нибудь точку P внутри $[BC]$; это можно сделать так: отметим т. O пересечения прямых BM и CN и обозначим через P точку пересечения BC и AO . Построим далее полярную для т. P ; на основании теоремы 49, это будет прямая, соединяющая A_1 с полюсом прямой AO ; последний же является точкой пересечения B_1C_1 и M_1N_1 (49); пусть это будет точка P_1 . Итак, полярной для точки P служит пр. A_1P_1 ; тогда угол A_1 , взаимно-полярный с отрезком $[BC]$, должен иметь своим секущим отрезком $[B_1C_1]_{P_1}$ (опр. 21). Все дело сводится к вопросу: принадлежит ли точка P_1 стороне $[B_1C_1]$ определенного выше треугольника $A_1B_1C_1$ или нет? Если бы т. P_1 принадлежала стороне $[B_1C_1]$, то одна из точек M_1 и N_1 в свою очередь принадлежала бы соответствующей стороне треугольника $A_1B_1C_1$ (постулат Паша), что, однако, места не имеет. Следовательно, стороной $[B_1C_1]$ служит именно

отрезок $[B_1C_1]_{P_1}$ и угол A_1 взаимно-полярен со стороной $[BC]$. Нетрудно добавить, наконец, что и угол A — взаимно-полярен с отрезком $[B_1C_1]_{P_1}$.

Определение 22. Такие треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ называются взаимно-полярными.

Теорема 51 оправдывает определение 21: иначе треугольнику не соответствовал бы треугольник.

Мы покажем теперь некоторые приложения полученных результатов.

52. Если углы одного треугольника соответственно равны углам другого, то такие треугольники равны.

Для доказательства переходим ко взаимно-полярным треугольникам и применяем признак равенства по трем сторонам.

Отсюда явствует, что в эллиптической геометрии (равно как и в гиперболической) нет учения о подобии, занимающего такое видное место в геометрии Евклида.

Для дальнейших приложений здесь будет удобно ввести в геометрию число при помощи учения об измерении. Из имеющейся у нас аксиомы непрерывности (акс. XIV) можно вывести делимость отрезка и угла на n равных частей, а также установить начало Архимеда; делается это по существу тем же самым способом, который применяется в обычной геометрии *). Теперь имеется все необходимое для учения об измерении отрезков и углов; это учение излагается по известному способу и обе теории здесь находятся в тесном единении. Единицу измерения для углов выбираем так, чтобы прямой угол измерялся числом $= \frac{\pi}{2}$; а длиной отрезка называется число, измеряющее угол, для которого этот отрезок яв-

*) См., например, в Сборнике Энриквеса ст. Витали о постулате непрерывности.

ляется соотнесенным. Отсюда вытекает, что длина полу-
прямой $= \frac{\pi}{2}$, а следовательно:

53. Длина всей прямой равна π .

Далее из определения 21, в связи с теоремой 41, вытекает, что числа, измеряющие взаимно-полярные угол и отрезок, в сумме равны π , и понятие о взаимно-полярных треугольниках приводит к теореме:

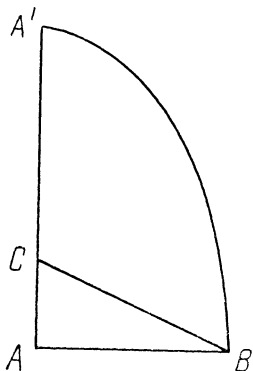
54. Если существует треугольник с элементами:

стороны: a, b, c и углы: A, B, C , то существует другой треугольник с элементами:

стороны: $\pi - A, \pi - B, \pi - C$,

углы: $\pi - a, \pi - b, \pi - c$.

Применение этой теоремы мы вскоре увидим.



Черт. 8.

Желая отметить здесь некоторые свойства треугольников, укажем прежде всего на совершенно понятное в эллиптической геометрии обстоятельство, что возможны треугольники с двумя и даже с тремя прямыми углами; в последнем случае все стороны $=$ ппр., и треугольник называется автополярным. Собственно же прямоугольным обыкновенно называют треугольник с одним прямым углом.

Во многих случаях бывают полезны следующие теоремы:

55. Если в треугольнике ABC угол A — прямой, то угол B будет острым, прямым или тупым, смотря по тому, будет ли противолежащая сторона $[AC]$ меньше, равна или больше ппр., и обратно.

Действительно, построим полюс A' прямой AB ; т. A' , конечно, лежит на пр. AC (черт. 8). Отрезок $[AA'] =$ ппр.

Условимся иметь в виду ту полупрямую, которая содержит сторону $[AC]$ или содержится в ней. Определим треугольник $A'AB$ по этому отрезку $[AA']$ и по стороне $[AB]$ данного треугольника; теорема 32 говорит, что прямой угол A будет у этих треугольников общим. В силу же сделанных условий, угол B одного будет частью угла B другого, причем в треугольнике $A'AB$ этот угол — прямой (47), откуда и следует теорема.

56. Если в прямоугольном треугольнике оба катета $<$ ппр., или оба $>$ ппр., то гипотенуза $<$ ппр.; если же один катет $<$ ппр., а другой $>$ ппр., то гипотенуза $>$ ппр.

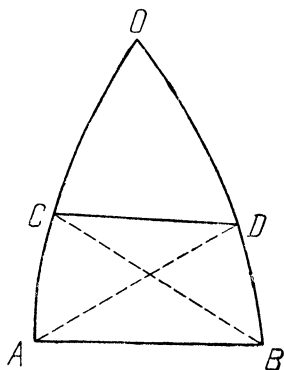
Делаем построение предыдущей теоремы (черт. 8) и допустим сначала, что катеты $[AB]$ и $[AC]$ оба $<$ ппр.

Легко видеть, что гипотенуза $[BC]$ служит трансверсалью треугольника ABA' . Поляра точки B пройдет, конечно, через A' (49), но будет лежать вне треугольника ABA' ; иначе получилось бы противоречие с тем заданием, что $[AB] <$ ппр. Итак, противоположная точка для B на прямой BC не будет принадлежать гипотенузе $[BC]$, а потому $[BC] <$ ппр. Если же оба катета $>$ ппр., то переходим к треугольнику ABC , дополняющему данный до угла A ; если, наконец, катет $[AB] >$ ппр., а $[AC] <$ ппр., то берем треугольник ABC , дополняющий данный до угла B , а потом возвращаемся к гипотенузе данного треугольника.

57. Если в треугольнике имеется прямой угол, то противолежащая ему сторона равна полупрямой тогда и только тогда, когда одна из прилежащих сторон $=$ ппр.

Пусть в треугольнике ABC имеем прямой угол A ; если $[AC] =$ ппр., то C есть полюс AB , а потому $[BC] =$ ппр. Обратно, если дано последнее равенство и если ни одна из сторон $[AC]$ и $[AB]$ не $=$ ппр., то треугольник ABC — прямоугольный (55), и теорема 56 говорит, что его гипотенуза не может $=$ ппр.

Одной из характерных фигур для эллиптической геометрии является 4-угольник с тремя прямыми углами. Построить его можно всегда следующим образом (черт. 9). Возьмем отрезок $[AB]$, меньший полупрямой, и соединим его концы с полюсом O прямой AB ; выбрав определенный треугольник OAB , отмечаем внутри ппр. $[OA]$ какую-нибудь точку C ; в этой точке восставляем перпендикуляр к OA , который пересекает $[OB]$ в точке D (постулат



Черт. 9.

Паша). Нетрудно видеть, что описанное построение приводит к 4-угольнику $ABDC$ с тремя прямыми углами; рассмотрим его 4-ый угол D . Нетрудно убедиться (с помощью повторного применения теоремы 31), что этот угол будет смежным с углом ODC в треугольнике ODC , который необходимо будет острым, так как сторона $[OC] < \text{ппр.}$ (55). Таким образом приходим к предложению:

58. В 4-угольнике с тремя прямыми углами 4-ый угол будет тупым.

Теперь мы в состоянии решить вопрос о сумме углов треугольника.

59. Сумма углов прямоугольного треугольника больше двух прямых.

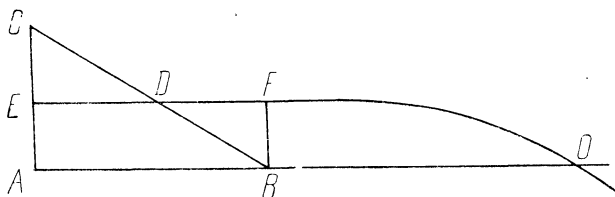
Пусть дан прямоугольный треугольник ABC , прямоугольный при A (черт. 10). Делаем следующее построение, не входя в подробности по поводу определения элементов встречающихся ниже треугольников: из середины D гипотенузы опускаем перпендикуляр DE на AC , который пересекается с AB в полюсе O прямой AC ; из т. B опускаем перпендикуляр BF на DE . Из равенства

прямоугольных треугольников BDF и CDE имеем:

$$\angle DBF = \angle DCE = \angle C.$$

Таким образом, в 4-угольнике $AEFB$ стремя прямыми углами четвертый угол при B равен сумме углов B и C данного треугольника; но этот угол — тупой (58), откуда и следует теорема.

60. Сумма углов всякого треугольника больше двух прямых.



Черт. 10.

Доказываем с помощью трансверсального разложения данного треугольника на два треугольника, имеющие по прямому углу.

Не представляет труда обобщить эту теорему на выпуклый n -угольник.

Понятие о взаимно-полярных треугольниках позволит вывести отсюда новое предложение:

61. Обвод треугольника меньше 2π .

Для доказательства переходим к полярному треугольнику и применяем теорему 60.

62. Сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

Берем треугольник, дополняющий данный треугольник ABC до угла A , и применяем к нему теорему 61:

$$a + (\pi - b) + (\pi - c) < 2\pi,$$

откуда

$$a < b + c,$$

ч. и т. д.

Владея этой теоремой, можно доказать ряд других известных теорем о неравенствах между элементами треугольника. Теорема о внешнем угле имеет здесь такую формулировку:

63. Внешний угол треугольника будет меньше, равен или больше внутреннего угла, с ним не смежного, смотря по тому, будет ли сумма двух сторон треугольника (за исключением стороны, общей обоим углам) больше, равна или меньше π .

Это предложение является непосредственным следствием другого, утверждающего, что суммы $(b + c)$ и $(B + C)$ имеют одинаковое отношение равенства или неравенства к числу π ; на доказательстве этой теоремы останавливаться не будем.

В евклидовой геометрии имеется теорема, которая остается в силе и в эллиптической системе:

64. Если в двух треугольниках две пары сторон соответственно равны, а заключенные между ними углы не равны, то против большего угла лежит и большая сторона, и обратно.

Если мы сочли нужным особо упомянуть об этой теореме, то это потому, что переход к полярным треугольникам позволяет здесь вывести из нее новое предложение, которое не имеет уже места в евклидовой геометрии:

65. Если в двух треугольниках две пары углов соответственно равны, а прилежащие им стороны неравны, то против большей стороны лежит и больший угол, и обратно.

В связи с изложенным, уместно будет затронуть здесь некоторые вопросы, которые пригодятся нам при выводе тригонометрических зависимостей.

Начнем с так называемой „замкнутой цепи соотнесенных прямоугольных треугольников“. Введем следующее:

Условие. Будем рассматривать треугольник ABC ,

прямоугольный при C ; элементы этого (а также и других прямоугольных треугольников) условимся выписывать в таком порядке: 1) гипотенуза; 2) катет и противолежащий ему угол; 3) другой катет и противолежащий ему угол.

Кроме того мы допустим, что углы A и B — оба острые; тогда (55, 56) оба катета и гипотенуза будут $<$ ппр.

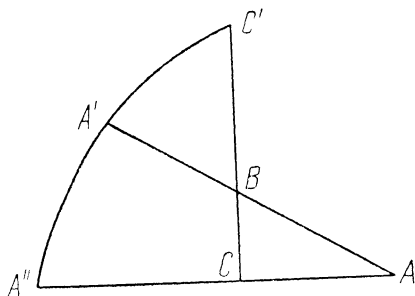
66. Если существует прямоугольный треугольник с элементами:

$$c; a, A; b, B;$$

то существует другой прямоугольный треугольник с элементами:

$$\frac{\pi}{2} - a; \quad \frac{\pi}{2} - c,$$

$$\frac{\pi}{2} - b; \quad \frac{\pi}{2} - A, B.$$



Черт. 11.

Для доказательства на прямой AB

отметим т. A' , противоположную для A , и на пр. BC — т. C' , противоположную для C (черт. 11). Определяем треугольник $A'BC'$ по сторонам:

$$[A'B] = \frac{\pi}{2} - c \text{ и } [BC'] = \frac{\pi}{2} - a.$$

Так как CC' перпендикулярно AC и $[CC'] = \text{ппр.}$, то C' есть полюс прямой AC ; следовательно, отрезок $[AC'] = \text{ппр.}$, а так как и $[AA'] = \text{ппр.}$, то т. A есть полюс прямой $A'C'$. Таким образом угол A' будет прямым, а угол C' — острым (55); легко видеть также, что угол B будет одним и тем же в обоих треугольниках. Для вычисления угла C' продолжаем $C'A'$ до пересечения с AC в точке A'' так как AC — полярна точки C' , то соотнесенным отрезком для угла C' будет тот из отрезков $[CA'']$, кото-

рый $<$ ппр.; но этот отрезок очевидно $= \frac{\pi}{2} - b$. Наконец, катет $[A'C']$ определяется как разность между ппр. и отрезком $[A'A'']$; но этот последний соотнесен углу A , а потому искомый катет $= \frac{\pi}{2} - A$, ч. и т. д.

67. Если существует один из пяти прямоугольных треугольников, элементы которых указаны в нижеследующей таблице, то существуют и все остальные.

№№	Гипотенуза	Катет	Противоле- жащий угол	Катет	Противоле- жащий угол
1	c	a	A	b	B
2	$\frac{\pi}{2} - a$	$\frac{\pi}{2} - c$	$\frac{\pi}{2} - b$	$\frac{\pi}{2} - A$	B
3	$\frac{\pi}{2} - b$	$\frac{\pi}{2} - c$	$\frac{\pi}{2} - a$	$\frac{\pi}{2} - B$	A
4	A	a	c	$\frac{\pi}{2} - B$	$\frac{\pi}{2} - b$
5	B	b	c	$\frac{\pi}{2} - A$	$\frac{\pi}{2} - a$

Действительно, из № 1 по предыдущей теореме получаем № 2; тем же путем, переставляя вершины A и B , придем от № 1 к № 3. К двум вновь полученным треугольникам можно применить то же самое преобразование; тогда получим №№ 4 и 5. Дальнейшие преобразования того же рода, примененные к любому из пяти найденных треугольников, не выведут нас за пределы замкнутой цепи, состоящей из пяти прямоугольных треугольников.

Покончив с этим первым вопросом, перейдем к некоторым свойствам треугольников с бесконечно малыми сторонами.

Определение 23. Избытком треугольника называется разность между суммой его углов и числом π .

Избыток треугольника ABC обозначается символом:

$$Ex[\triangle ABC].$$

68. Если треугольник трансверсально разложен на конечное число частичных треугольников, то его избыток равен сумме избытков его частей.

Докажем сначала теорему для случая одной трансверсали $[AD]$, проведенной в треугольнике ABC (черт. 12).

Эта трансверсаль разлагает данный треугольник ABC на два частичных треугольника ABD и ACD ; их элементы можно определить с помощью теоремы 31. Если сумму углов треугольника обозначить через $S(\triangle)$, то нетрудно прийти к соотношению:

$$S(\triangle ABD) + S(\triangle ACD) = S(\triangle ABC) + \pi,$$

откуда, вычитая по 2π , получаем:

$$Ex(\triangle ABD) + Ex(\triangle ACD) = Ex(\triangle ABC),$$

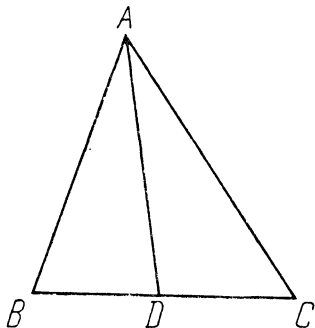
ч. и т. д.

Для общего же случая надо только вспомнить, что трансверсальное разложение получается при помощи последовательного проведения отдельных трансверсалей.

69]. Если в треугольнике ABM сторона $[AB]$ и угол B — постоянны (по величине и положению), а вершина M есть переменная точка на стороне BM угла B , то при бесконечно малой стороне $[BM]$ и угол A бесконечно мал, и обратно.

Доказательство труда не представляет.

[70]. При условиях предыдущей теоремы избыток треугольника ABM есть величина бесконечно малая.



Черт. 12.

Действительно, возьмем треугольник ABM , дополняющий данный до угла A , и применим к нему теорему 60:

$$(\pi - B) + (\pi - M) + A > \pi,$$

или

$$B + M < \pi + A,$$

откуда

$$Ex(\triangle ABM) < 2A,$$

ч. и т. д. (69).

[71]. Если две стороны прямоугольного треугольника бесконечно малы, то и его избыток бесконечно мал.

На основании теоремы 62 и третья сторона будет бесконечно малой. Построим какой-либо конечный прямоугольный треугольник KLM (где угол $M = \frac{\pi}{2}$) и по теореме 32, при том же прямом угле, будем строить треугольник PQM , равный данному переменному треугольнику (т. P пусть лежит на LM). Этот треугольник PQM получается из треугольника KLM с помощью трансверсального разложения, а именно: посредством проведения трансверсалей $[KP]$ и $[PQ]$, так что имеем (63):

$$Ex(\triangle PQM) < Ex(\triangle KPM);$$

но $Ex(\triangle KPM)$ — бесконечно мал (70), откуда и следует теорема.

72. Если две стороны треугольника бесконечно малы то его избыток бесконечно мал.

Проведя высоту, получим два прямоугольных треугольника, причем избыток данного не превышает суммы избытков двух новых треугольников. Затем ссылаемся на теорему 71.

Замечание. Последняя теорема, в связи с тем обстоятельством, что в достаточно малой части пространства исчезает различие между замкнутой и незамкнутой прямой, позволяет сказать: „в бесконечно малой части эллиптического пространства имеет место геометрия Евклида“.

[73]. Если в прямоугольном треугольнике AMN , где угол $N = \frac{\pi}{2}$, оставляя острый угол A и прямые его сторон неизменными, сделать

одну из сторон $[AM]$ и $[AN]$ бесконечно малой, то остальные стороны будут тоже бесконечно малыми и

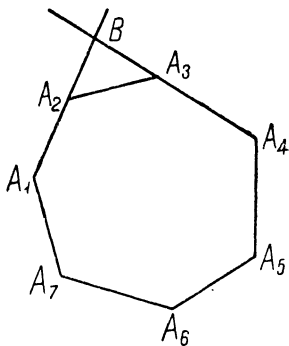
$$\lim [\angle M] = \frac{\pi}{2} - A.$$

Доказательство бесконечной малости сторон достигается без труда, а предположение об угле вытекает тогда из теоремы 71.

В заключение главы мы отметим некоторые свойства многоугольников.

74. Обвод всякого выпуклого многоугольника меньше 2π .

Действительно, для треугольника теорема уже доказана (61); допустим теперь, что она верна для всякого выпуклого многоугольника, число сторон которого меньше n , и докажем, что она будет верной для n -угольника. В существенных чертах доказательство складывается следующим образом. Пусть дан многоугольник $A_1A_2A_3\dots A_n$



Черт. 13.

(черт. 13; $n = 7$); продолжаем пр. A_1A_2 и A_3A_4 до пересечения в т. B . Определяя отрезки $[A_1B]$ и $[BA_4]$ как содержащие соответственно стороны $[A_1A_2]$ и $[A_3A_4]$, получаем выпуклый многоугольник $A_1BA_4A_5\dots A_n$, у которого число вершин на единицу меньше. Согласно допущению имеем:

$$[A_1B] + [BA_4] + [A_4A_5] + \dots + [A_nA_1] < 2\pi;$$

кроме того из $\triangle BA_2A_3$ по теореме 62 выводим:

$$[A_2A_3] < [A_2B] + [BA_3].$$

Складывая оба неравенства и вспоминая состав сторон $[A_1B]$ и $[BA_4]$, отсюда находим:

$$[A_1A_2] + [A_2A_3] + [A_3A_4] + [A_4A_5] + \dots + [A_nA_1] < 2\pi,$$

ч. и т. д.

Определение 24. Равнобедренным двупрямоугольником называется выпуклый 4-угольник, у которого два угла, прилежащие к одной и той же стороне (называемой основанием), -- прямые, а прилежащие к ней стороны (бока) равны между собой; четвертая сторона называется завершающей.

Если O есть полюс прямой AB (черт. 9) и если отложить $[AC] = [BD]$, то 4-угольник $ABDC$ будет как раз рассматриваемого типа.

75. В равнобедренном двупрямоугольнике:

- 1) диагонали равны;
- 2) углы при завершающей стороне равны и тупые;
- 3) завершающая сторона меньше основания.

Действительно п. 1 вытекает из равенства треугольников (черт. 9);

$$\triangle CAB = \triangle DBA;$$

но тогда и

$$\triangle ACD = \triangle BDC,$$

откуда

$$\angle ACD = \angle BDC,$$

и эти углы тупые, ибо сумма углов 4-угольника должна быть больше четырех прямых (60).

Далее,

$$\angle ADB > \angle CAD,$$

так как первый из них дополняет угол DAB до тупого угла [ведь $S(\triangle ADB) > \pi$], а второй дополняет тот же угол до прямого; тогда теорема 64 в применении к треугольникам ADB и CAD дает

$$[AB] > [CD],$$

ч. и т. д.

III. ВЗАИМНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ.

Окружность с центром в точке O и с радиусом r [обозначение: $O(r)$] определяется как обычно.

Заметим, что все точки окружности отстоят от ее центра также на расстоянии $= (\pi - r)$, но за радиус мы принимаем отрезок $<$ ппр. При $r = \frac{\pi}{2}$ получаем полюру центра.

В эллиптической геометрии окружность обладает следующим свойством, которое доказывается без труда на основании понятия о полюсе:

76. Геометрическое место точек, лежащих в одной плоскости с данной прямой и отстоящих от нее на постоянное расстояние $= h$, где $h < \frac{\pi}{2}$, есть окружность с центром в полюсе прямой и с радиусом $= \left(\frac{\pi}{2} - h \right)$.

Вспоминая терминологию Лобачевского, можно сказать, что в эллиптической геометрии окружность есть „линия равных расстояний“.

В остальном же мы приходим к хорошо известным свойствам окружности, хотя при их обосновании и сказываются некоторые особенности эллиптической геометрии; вполне естественно, что здесь замечается известное сходство между отрезками прямой и дугами окружности.

Для дальнейшего нам важно остановиться на одном геометрическом месте, играющем всегда важную роль в курсе геометрии.

77. Геометрическое место точек плоскости, равноуда-

ленных от двух данных т. A и B , есть совокупность двух взаимно-перпендикулярных прямых, пересекающихся в полюсе прямой AB и проходящих через середины отрезков $[AB]$.

Доказательство труда не представляет: надо было лишь отметить эту особенность эллиптической геометрии, тесно связанную с существованием двух отрезков $[AB]$, а следовательно и с замкнутостью прямой.

После этого обычным способом устанавливается предложение о том, что существует одна и только одна окружность, описанная около данного треугольника. Но в эллиптической геометрии, как мы знаем, три точки определяют четыре различных треугольника; таким образом получается предложение:

78. Существуют четыре и только четыре окружности, проходящие через три данные точки, не лежащие на одной прямой.

Переходя от вписанного треугольника к 4-угольнику, получаем его основное свойство в такой форме:

79. Чтобы вписать выпуклый 4-угольник в окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма двух противоположных углов была равна сумме двух других противоположных углов.

Полное доказательство этой теоремы требует некоторых подготовительных исследований и потому здесь опускается. Переходя ко взаимно-полярным образам, получаем известное свойство описанного 4-угольника.

Понятие о правильном многоугольнике вводится обычным способом; точно также доказывается теорема:

[80]. При удвоении числа сторон правильного вписанного многоугольника его обвод увеличивается.

Далее нам понадобятся следующие предложения:

[81]. Если в две окружности различных радиусов вписать правиль-

ные n -угольники, то окружности большего радиуса соответствует и многоугольник с большим обводом.

Возьмем окружности концентрическими и в основу построения положим один и тот же центральный угол $= \frac{2\pi}{n}$; разделив его пополам, получим фигуру, изображенную на черт. 14, где $[AB]$ есть половина стороны n -угольника, соответствующего большому радиусу $[OB]$, а $[A'B']$ — то же самое для меньшего радиуса $[OB']$. Если допустить, что

$$[A'B'] \geq [AB],$$

то найдется такая часть $[A'B'']$ первого отрезка, которая будет $= [AB]$, и четырехугольник $AA'B''B$ будет равнобедренным двупрямоугольником (опр. 24). В таком случае угол ABB'' будет тупым (75. п. 2), а между тем он является частью угла ABB' , который в силу теоремы 55 будет острым, ибо $[OA]$, как часть радиуса, меньше прр. Следовательно,

$$[A'B'] < [AB],$$

откуда и следует теорема.

[82]. Если даны две концентрические окружности, то около окружности меньшего радиуса можно описать, а в окружность большего радиуса — вписать правильные n -угольники и притом так, что обвод первого будет целиком лежать внутри второго.

Действительно, отметим т. C на окружности меньшего радиуса

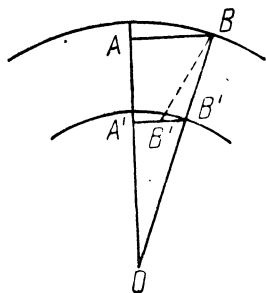
(черт. 15) и проведем через нее касательную KL ; внутри хорды $[KL]$ большей окружности возьмем точки A и B так, чтобы

$$[CA] = [CB]$$

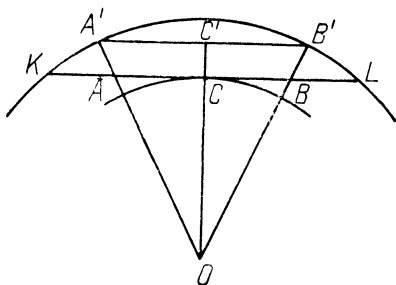
$$\angle AOC = \angle BOC = \frac{\pi}{n}$$

впоследствии это n мы положим $= 2^k$, где k — целое положительное число, достаточно большое). Легко видеть что $[AB]$ будет стороной

правильного n -угольника, описанного около первой окружности. Про-



Черт. 14.



Черт. 15.

долгая радиусы $[OA]$ и $[OB]$ до пересечения со второй окружностью, получим сторону $[A'B']$ вписанного в нее правильного n -угольника. Часть обвода первого многоугольника лежит внутри второго (например, точка C); если бы имелись исключения, то наши обводы непременно пересекались бы и это пересечение имело бы место внутри одного из центральных углов, вроде $A'OB'$. Если допустить, что $[BC]$ и $[B'C']$ пересекаются, то точка пересечения была бы полюсом прямой OC ; следовательно, $[BC]$ было бы $\geq$ ппр., а это невозможно, так как угол BOC — острый (55).

[83]. Обвод правильного описанного 4-угольника меньше $8r$. В самом деле, на основании теоремы 75 (п. 3), его сторона $< 2r$.

Вопрос об относительном положении двух окружностей представляет в эллиптической геометрии известный интерес, в виду некоторых особенностей его решения.

В общем тем же способом, что и в геометрии Евклида, устанавливается симметричность точек пересечения относительно линии центров; вспоминая теор. 78, приходим к следующему выводу:

84. Две различные окружности могут пересекаться в четырех различных точках, но не более, чем в четырех.

Именно, существование пятой точки окажется в противоречии со свойствами симметрии относительно линии центров.

Общие же точки, лежащие на этой прямой, являются попрежнему точками касания, и легко видеть, что у двух окружностей не может быть более двух точек касания. Если их имеется именно две, то других общих точек уже не может быть. Основной вопрос о существовании общей точки решается на основании аксиомы непрерывности, в общем так же, как это имеет место в геометрии Евклида*).

Условимся в следующих обозначениях. Пусть дело идет об окружностях $O(r)$ и $O_1(r_1)$, причем

$$r \geq r_1.$$

*) См. уже упоминавшуюся статью В и т а л и.

Кратчайшее расстояние между центрами обозначим через d , так что

$$d = [OO_1] \leq \frac{\pi}{2}.$$

85. Различные случаи взаимного положения двух окружностей указаны в следующей таблице:

$d < r - r_1$ $O_1(r_1)$ лежит внутри $O(r)$

$d = r - r_1$ внутреннее касание

$r - r_1 < d < r + r_1$ $\left\{ \begin{array}{l} r + r_1 + d < \pi \dots 2 \text{ точки пересечения} \\ r + r_1 + d = \pi \dots 2 \text{ точки пересечения и} \\ \hspace{10em} \text{одна точка касания} \\ r + r_1 + d > \pi \dots 4 \text{ точки пересечения} \end{array} \right.$

$d = r + r_1$ $\left\{ \begin{array}{l} r + r_1 < \frac{\pi}{2} \dots \text{внешнее касание} \\ r + r_1 = \frac{\pi}{2} \dots \text{двойное касание} \end{array} \right.$

$d > r + r_1$ окружности лежат одна вне другой.

Докажем, для примера, два наиболее своеобразных случая, а именно: случаи четырех точек пересечения и двойного касания. Пусть линия центров OO_1 пересекает окружность $O_1(r_1)$ в точках K и L , причем пусть K принадлежит той же полупрямой из O_1 , что и точка O , а L — противоположной полупрямой (черт. 16).

Итак, нам дано:

$$r - r_1 < d < r + r_1 \text{ и } r + r_1 + d > \pi;$$

отсюда (из правой части первого неравенства) выводим

$$d - r_1 < r,$$

а так как $[OK] = d - r_1$, то т. K лежит внутри окружности $O(r)$.

Далее, оба отрезка $[OL]$ имеют следующие величины:

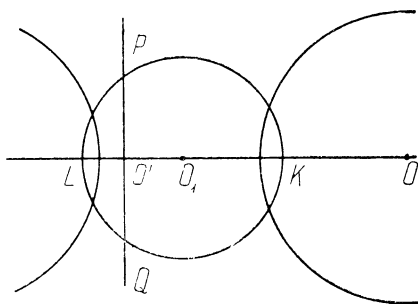
$$d + r_1 \text{ и } \pi - (d + r_1);$$

но второе неравенство дает:

$$\pi - (d + r_1) < r,$$

так что и т. L лежит внутри $O(r)$.

Построим теперь полярю точки O ; она пересечет линию центров в т. O' , противоположной для O . Будем понимать под $[OO']$ ту полупрямую, которая содержит отрезок $[OO_1] = d$. Тогда наименьший отрезок:



Черт. 16.

$$[O_1O'] = \frac{\pi}{2} - d;$$

второе неравенство дает:

$$d + r_1 > \pi - r > \frac{\pi}{2},$$

откуда

$$\frac{\pi}{2} - d < r_1,$$

т. е. точка O' лежит внутри окружности $O_1(r_1)$. Но в таком случае поляр центра O пересекает $O_1(r_1)$ в двух точках P и Q , которые будут внешними для $O(r)$, ибо отстоят от ее центра на расстояние $= \frac{\pi}{2} > r$.

Теперь, в силу свойств непрерывности, каждая из четырех

дуг окружности $O_1(r_1)$, а именно: KP , PL , LQ , QK , имеет общую точку с окружностью $O(r)$, ч. и т. д.

Пусть теперь дано

$$d = r + r_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Тогда имеем:

$$[OK] = d - r_1 = r,$$

откуда т. K есть точка касания. Далее:

$$\pi - (d + r_1) = \frac{\pi}{2} - r_1 = r,$$

так что и L является точкой касания. Возьмем, наконец, какую-нибудь другую т. M_1 на $O_1(r_1)$ и определим треугольник OO_1M_1 по $[OO_1] = d$ и $[O_1M_1] = r_1$; тогда

$$[OM_1] > d - r_1 = r;$$

кроме того

$$[OM_1] < d + r_1,$$

откуда

$$\pi - [OM_1] > \pi - (d + r_1) = r.$$

Итак, оба отрезка $[OM_1] > r$, а потому т. M_1 — внешняя для $O(r)$. Так как в предыдущих рассуждениях r и r_1 входили одинаковым образом, то таким же путем докажем, что точки окружности $O(r)$, за исключением т. K и L , все лежат вне $O_1(r_1)$.

Предложение, обратное для теоремы 85, доказывается без всякого труда.

Учение о пересечении двух окружностей позволяет разобрать два случая построения треугольников:

86. Если даны три отрезка a , b , c (расположенные в порядке убывающей величины), то условия

$$a < b + c \text{ и } a + b + c < 2\pi$$

необходимы и достаточны для существования треугольника со сторонами a , b , c .

Переход к полярному треугольнику дает отсюда другую теорему:

87. Для существования треугольника с углами A, B, C (расположенными в порядке возрастающей величины) необходимы и достаточны условия

$$A + B + C > \pi \text{ и } A + (\pi - B) > C.$$

IV. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА.

Мы подойдем к решению указанного вопроса с точки зрения теории Шатуновского-Гильберта *).

Определение 25. Если два многоугольника разлагаются на конечное число попарно равных треугольников, то они называются равносоставленными.

Сопоставляя это определение с определением равенства, нетрудно прийти к выводу, что два равных многоугольника всегда равносоставлены.

88. Два многоугольника, равносоставленные с третьим, равносоставлены друг с другом.

Доказывается по существу тем же методом, что и в геометрии Евклида; пусть многоугольник I равносоставлен с многоугольником II, причем оба они разлагаются на треугольники p ; пусть, далее, многоугольник III равносоставлен с тем же многоугольником II, причем оба они разлагаются на треугольники q . Проведем во многоугольнике II сразу обе системы отрезков, производящие указанные деления; присоединяя сюда, в случае надобности, дополнительные отрезки, получим дальнейшее подразделение II на треугольники r . Так как эти треугольники r являются, с одной стороны, частями

* Идеи Гильберта изложены в его „Основаниях геометрии“; С. О. Шатуновский сообщил результаты своих исследований еще в 1895 г. В Сборнике Энриковеса имеется статья Амальди, в которой изложены различные точки зрения на определение площадей.

треугольников p , а с другой — частями треугольников q , то ясно, что каждый из многоугольников I и III можно подразделить на треугольники r , откуда и следует теорема.

В дальнейшем мы остановимся на треугольниках и постараемся найти величину, которая характеризовала бы равноставленные треугольники.

89. У равноставленных треугольников избытки равны.

Такие треугольники разлагаются на попарно равные частичные треугольники, а у последних очевидно избытки соответственно равны. С другой стороны, избыток всего треугольника равен сумме избытков всех частичных треугольников. Действительно, это утверждение было доказано в теореме 68 для трансверсального разложения; переход отсюда к общему случаю разложения производится по существу тем же путем, который был применен Гильбертом в евклидовой геометрии *).

Для доказательства обратной теоремы придется произвести предварительное исследование.

[90]. Если в треугольнике ABC соединить прямую середины F и G сторон $[AC]$ и $[BC]$ и если опустить на нее перпендикуляры из точек C и B , то их основания либо совпадают с т. G , либо принадлежат различным полупрямым, исходящим из G .

Обозначим упомянутые основания соответственно через D и B' ; эти точки могут совпасть с точкой G лишь при условии $FG \perp BC$ (черт. 17b), причем это совпадение имеет место одновременно. Переходим к другим случаям (черт. 17 а и с). Прежде всего ни одна из точек D и B' не может быть противоположной для G : иначе G была бы полюсом прямой CD или BB' и тогда $[CG]$ или $[GB] = \text{ппр.}$, что невозможно, так как здесь идет речь о половине отрезка $[BC']$. По той же причине ни C , ни B не могут быть полюсами прямой FG .

Поэтому мы можем условиться под символами $[CD]$ и $[BB']$ понимать отрезки $< \text{ппр.}$ Определим теперь треугольник CDG по $[CD]$ и $[CG]$, который есть половина $[BC]$; тогда угол CGD в этом треугольнике будет острым [55]. Точно также определим треугольник

*) Гильберт, Основания геометрии, стр. 55—56.

$BB'G$ и увидим, что его угол BGB' будет тоже острым; но тогда

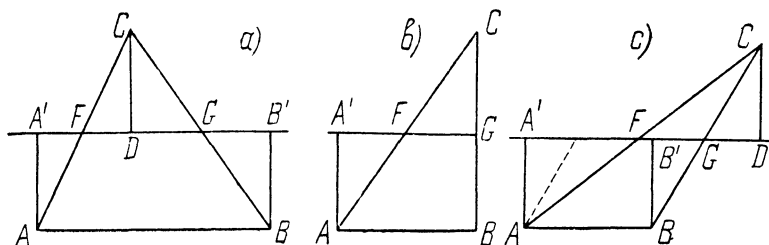
$$\angle CGD = \angle BGB'$$

$$\triangle CGD = \triangle BGB'.$$

Из равенства треугольников следует равенство сторон:

$$[GB'] = [GD].$$

Таким образом, если бы т. B' и D принадлежали одной и той же прп-ой, то они необходимо совпали бы, и перпендикуляры CD и BB'



Черт. 17.

образовали бы одну прямую, проходящую через B и C и отличную от BC , что — невозможно.

91. Треугольник равносоставлен с равнобедренным двупрямоугольником, у которого завершающая сторона равна одной из сторон треугольника, а тупой угол равен полусумме его углов (построение см. в доказательстве).

Пусть дан треугольник ABC (черт. 17); середины сторон $[AC]$ и $[BC]$ соединим прямою FG и опустим на нее перпендикуляры $[CD]$, $[AA']$, $[BB']$; подобное построение было уже сделано при доказательстве предыдущей теоремы, и мы будем опираться на полученные там выводы.

Определим 4-угольник $ABB'A'$ по отрезкам: $[AB]$ — стороне треугольника, $[AA']$ и $[BB']$ меньшим прп.; его четвертую сторону можно определить через посредство треугольников ABA' и $A'B'B'$. Так как имеем (из равенства прямоугольных треугольников):

$$[BB'] = [CD] = [AA'],$$

то указанный 4-угольник будет равнобедренным двупрямоугольником с завершающей стороной $[AB]$. Далее

можно различить три случая, в зависимости от положения точки D :

1) D лежит внутри данного треугольника (случай 17 а).

Положение точек A' и B' определяется теоремой 90; равноставленность наших многоугольников ясна непосредственно. Кроме того, из равенства прямоугольных треугольников имеем:

$$\angle A'AF = \angle DCF \text{ и } \angle B'BG = \angle DCG, \quad (*)$$

откуда

$$\angle A'AB + \angle B'BA = S[\triangle ABC];$$

но

$$\angle A'AB = \angle B'BA \text{ (75. п. 2),}$$

так что каждый из них $= \frac{1}{2} S [\triangle]$.

2) D лежит на стороне треугольника (17 b); после изложенного этот случай очевиден.

3) D лежит вне треугольника (на черт. 17 с изображено одно из возможных расположений).

Определив попрежнему равнобедренный двупрямоугольник $ABB'A'$, переходим к рассмотрению прямоугольных треугольников; расположение точек D и B' , D и A' вытекает из теоремы 90. Нетрудно убедиться, что по предыдущему

$$\triangle AFA' = \triangle CFD \text{ и } \triangle BGB' = \triangle CGD;$$

но здесь треугольник CFD разбивается на два треугольника, из которых один есть треугольник CGD ; на такие же точно части можно разложить равный ему треугольник AFA' . После этого искомая равноставленность становится понятной (в подробности не входим). Далее равенство (*) имеет место и здесь, но только воспользуемся им иначе:

$$\begin{aligned} \angle A'AF + \angle CAB + \angle ABC - \angle B'BG &= \angle DCF + \\ &+ \angle CAB + \angle ABC - \angle DCG \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\angle A'AB + \angle ABB' &= \angle CAB + \angle ABC + \angle BAC = \\ &= S[\triangle ABC],\end{aligned}$$

откуда и следует теорема.

[92]. Если сторона и избыток одного треугольника соответственно равны стороне и избытку другого треугольника, то такие треугольники равноставлены.

Действительно, в силу теоремы 91 наши треугольники равноставлены с равнобедренными двупрямоугольниками, у которых завершающие стороны и тупые углы соответственно равны. Но такие двупрямоугольники будут равны; в самом деле пусть $ABB'A'$ будет одним из них с завершающей стороной $[AB]$; при той же завершающей стороне построим другой данный двупрямоугольник, так что две другие его вершины A'' и B'' будут лежать на тех же пр-ых, что и A' , B' . Если теперь точки A'' и A' , B'' и B' не совпадут, то получится 4-угольник $A'B'B''A''$ с четырьмя прямыми углами, что противоречит теореме о сумме углов многоугольника. Итак, наши двупрямоугольники равны и дело сводится к повторному применению теоремы 88.

[93]. Дан треугольник ABC ; можно построить равноставленный с ним треугольник ABC' с той же стороной $[AB]$ и с $[AC'] = l$, где $l > [AC]$.

Построим равнобедренный двупрямоугольник $ABB'A'$, равноставленный с данным треугольником ABC (черт. 18). Из т. A опишем окружность радиусом $= \frac{1}{2}l$; так как

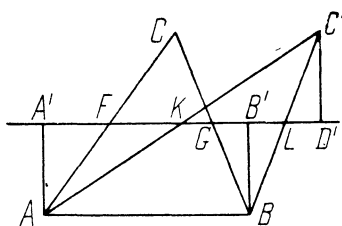
$$\frac{1}{2} l > [AF] > [AA'],$$

то эта окружность пересекает пр. FG в некоторой т. K . Берем $[AC'] = 2[AK] = l$ и определим треугольник ABC' по сторонам $[AB]$ и $[AC']$. Опустив перпендикуляр $C'D'$, из равенства прямоугольных треугольников найдем

$$[C'D'] = [AA'];$$

но

$$[AA'] = [BB'],$$



Черт. 18.

так что

$$[C'D'] = [BB'].$$

Тогда, снова обращаясь к равенству прямоугольных треугольников BLB' и $C'DL'$, приходим к выводу, что т. L есть середина стороны $[BC']$ (а существование этой точки пересечения вытекает из постулата Паша). Теперь, в силу теоремы 91, новый треугольник ABC' равносоставлен с тем же самым двупрямоугольником $ABB'A'$; остается сослаться на теорему 88.

94. Два треугольника с равными избытками равносоставлены.

Пусть даны два треугольника ABC и $A'B'C'$ с равными избытками. Если $[AC] = [A'C']$, то дело сводится к теореме 92. Пусть этого нет, а имеет место неравенство

$$[AC] > [A'C'];$$

тогда, на основании теоремы 93, строим треугольник $A'B'C''$, равносоставленный с треугольником $A'B'C'$ и имеющий сторону $[A'C''] = [AC]$. Далее, имеем

$$\triangle ABC \text{ равносоставлен с } \triangle A'B'C'' \text{ (89, 92),}$$

а потому

$$\triangle ABC \text{ равносоставлен с } \triangle A'B'C' \text{ (88),}$$

ч. и т. д.

Итак, теорема, обратная для 89, теперь доказана, и равенство избытков есть условие, необходимое и достаточное для равносоставленности двух треугольников.

Далее, не входя в большие подробности, можно следующим образом закончить исследование:

Определение 26. Мы говорим, что равносоставленные многоугольники имеют одну и ту же площадь.

Так как с площадью каждого треугольника однозначно связывается определенное число, именно его избыток, который одинаков для всех равносоставленных треугольников, то свойства величин вообще переносятся через посредство чисел на площади. Таким образом, можно говорить об измерении площадей, и не представляет труда доказать теорему:

95. Площадь треугольника пропорциональна его избытку.

Выбирая соответствующим образом единицу измерения, можно сказать, что площадь треугольника равна его избытку.

Так как 4 треугольника ABC исчерпывают плоскость, то естественно прийти к определению:

Определение 27. Площадь всей плоскости ABC есть сумма площадей четырех треугольников ABC .

96. Площадь всей плоскости $= 2\pi$.

Действительно, применяя теорему 95 ко всем треугольникам AEC , получаем искомую величину в виде суммы:

$$(A+B+C-\pi) + [A+(\pi-B)-(\pi-C)-\pi] + \\ + [(\pi-A)+B+(\pi-C)-\pi] + [(\pi-A)+(\pi-B)+ \\ + C-\pi] = 2\pi.$$

Переходя к произвольному выпуклому многоугольнику, мы замечаем, что, например, диагоналями из какой-либо вершины он разбивается на известное число треугольников, причем сумма его углов равна сумме углов всех этих треугольников. Поэтому, не входя в дальнейшие подробности, позволим себе заключить:

97. Площадь выпуклого n -угольника равна сумме его углов без $(n-2)\pi$.

V. ПОЛЯРНОСТЬ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ.

Основные теоремы о перпендикулярных прямых и плоскостях переносятся в эллиптическую геометрию, причем и самые методы рассуждений, вообще говоря, остаются теми же самыми. Поэтому, не останавливаясь на них, перейдем к некоторым особенностям рассматриваемой системы. После того, как было довольно подробно изложено учение о полюсах и полярах в плоскости, не представит труда доказать следующие теоремы:

98. Все перпендикуляры к одной и той же плоскости пересекаются в одной и той же точке, которая противоположна их основаниям.

Определение 28. Такая точка называется полюсом плоскости.

99. Если на всех прямых данной связки отметить точки, противоположные ее центру, то их геометрическое место будет плоскостью, перпендикулярной ко всем прямым связки.

Определение 29. Указанное геометрическое место называется полярной плоскостью для точки, общей всем прямым.

100. Если т. A есть полюс плоскости α , то α есть полярная плоскость для т. A и обратно.

101. Если A есть полюс плоскости α , то полюс всякой плоскости, проходящей через A , лежит на α , и полярная плоскость любой точки, лежащей на плоскости α , проходит через т. A .

Таким образом из точки, которая служит полюсом данной плоскости, можно опустить на последнюю бесконечное множество перпендикуляров; из всякой же другой точки — только один. Легко видеть также, что если две плоскости взаимно перпендикулярны, то полюс одной из них лежит в другой, и обратно; далее, две плоскости всегда имеют общий перпендикуляр, соединяющий их полюсы, и т. д.

Кроме того, в пространстве имеется еще полярное соответствие между прямыми; к нему приведут нас следующие теоремы:

102. Полярные плоскости точек одной и той же прямой принадлежат одному и тому же пучку, и обратно.

Пусть дана пр. a ; проведем через нее две какие-нибудь плоскости α и β ; их полюсы определяют пр. a' . Возьмем теперь на пр. a произвольную т. M ; в силу теоремы 101, ее полярная плоскость должна пройти через полюсы плоскостей α и β , т. е. через пр. a' .

Возьмем теперь на пр. b две какие-нибудь т. M и N и пусть их полярные плоскости пересекаются по пр. b' . Проведем, далее, через b какую-нибудь плоскость λ ; в силу теоремы 101, ее полюс должен принадлежать полярным плоскостям точек M и N , т. е. прямой b' , ч. и т. д.

103. Для каждой прямой существует такая скрещивающаяся с ней прямая, что полюсы плоскостей, проходящих через одну прямую, лежат на другой, а полярные плоскости точек, лежащих на одной прямой, проходят через другую.

Пусть дана пр. a ; полюсы проходящих через нее плоскостей принадлежат некоторой определенной пр. a' (102). Если на a возьмем какую-нибудь точку, то ее полярная плоскость должна будет пройти через эту же пр. a' (101). Обратимся теперь к пр. a' и совершенно так же построим для нее пр. a'' , обладающую требуемыми свойствами; но так как прямая вполне определяется двумя

плоскостями или двумя точками, то легко видеть, что пр. a'' совпадает с пр. a . Наконец, пр. a и a' будут скрещивающимися, ибо иначе полюс некоторой плоскости оказался бы в этой же плоскости, что очевидно невозможно.

Определение 30. Такие две прямые a и a' называются взаимными полярными.

Взаимные поляры обладают некоторыми замечательными свойствами, которые сейчас будут указаны.

104. Плоскости, проходящие через данную прямую, перпендикулярны к ее полюре; а плоскости, перпендикулярные к данной прямой, проходят через ее поляр.

Действительно, если плоскость проходит через пр. a , то ее полюс лежит на взаимной поляре a' (103, опр. 30), а потому эта последняя перпендикулярна к указанной плоскости. Если плоскость перпендикулярна a , то она перпендикулярна ко всем плоскостям пучка, осью которого служит a , так что полюсы всех этих плоскостей должны лежать на данной плоскости (см. выше); другими словами, наша плоскость содержит пр. a' (103).

105. Прямая, соединяющая две какие-нибудь точки двух взаимных поляр, перпендикулярна к обоим прямым, причем данные точки делят ее на две ппр.

Возьмем на взаимных полярах a и a' по т. M и M' . Полярная плоскость для M пройдет через a' и, следовательно, будет содержать т. M' ; отсюда уже вытекает, что т. M и M' будут противоположными на пр. MM' и что a' перпендикулярна MM' (последнее потому, что MM' перпендикулярна к указанной плоскости). Точно так же докажем, что $a \perp MM'$.

106. Если во всех точках данной прямой восставить к ней перпендикуляры во всевозможных, проходящих через нее плоскостях, и отметить на этих перпендикулярах точки, противоположные их основаниям, то геометрическим местом таких точек будет поляр данной прямой.

Прежде всего теорема 105 показывает, что каждая точка полярны принадлежит искомому геометрическому месту точек. Возьмем далее на пр. a какую-нибудь точку M и проведем через нее пр. $h \perp a$; проведем затем через M пл. $\perp$ к h ; эта плоскость, конечно, содержит пр. a . Тогда точка пр. h , противоположная для M , будет полюсом указанной плоскости, и по этому свойству своему должна лежать на полярке a' (103), ч. и т. д.

107. Если даны пр. a и т. A , не лежащая ни на a , ни на ее полярке a' , то существует одна и только одна прямая проходящая через A и перпендикулярная к a ; она определяется как пересечение плоскостей aA и $a'A$.

Доказательство основано на теореме 105.

Познакомившись с общей теорией полюсов, полярных плоскостей и взаимных поляр, естественно обобщить ту полярность в эллиптической плоскости, о которой шла речь в главе III. Но мы начнем с одного предложения еще более общего характера; оно является весьма характерным для эллиптической геометрии.

108. (Закон взаимности). Во всякой доказанной теореме эллиптической геометрии, не нарушая ее справедливости, можно переставить термины: „точка“ и „плоскость“ при соответствующем изменении остальных.

Действительно, вся эллиптическая геометрия основана на указанных выше 23 аксиомах (в связи с простейшими предложениями анализа и с законами логики); поэтому достаточно установить возможность требуемой замены во всех аксиомах. Так оно и есть на самом деле.

Таким образом для всякой фигуры можно построить „взаимную“, если в ее определении переставить термины „т.“ и „пл.“. Так, „отрезку“ взаимен „двугранный угол“, „прямой“ (как совокупности точек) — „прямая“ (как ось пучка плоскостей), и т. п.

Но некоторым основным фигурам соответствуют весьма своеобразные совокупности плоскостей, которые не играют заметной роли в обычных геометрических исследованиях. Так, тетраэдру (как совокупности точек) соответствует совокупность плоскостей, которую можно построить следующим образом. Возьмем 4-гранную поверхность и все три ребра какой-либо одной грани заменим на взаимно-дополнительные отрезки; тогда искомый образ можно определить как совокупность плоскостей, пересекающих все шесть полученных выше отрезков.

Закон взаимности получает частное вполне конкретное истолкование в так называемом „начале полярности“, в силу которого мы делаем следующую замену образов:

„т.“ на ее „полярную пл.“

„пл.“ „ „ „полюс“

„пр.“ „ „ „полярну“

Но применение начала полярности наталкивается на то же самое неудобство, которое было уже отмечено по поводу закона взаимности. С целью устранить указанный недостаток, к началу полярности вводят добавочные условия, подобные тем, которые были сделаны в главе III. Эти условия нарушают единый принцип соответствия, но могут иметь плодотворные применения (вспомним хотя бы понятие о взаимно-полярных треугольниках на плоскости). Теперь с треугольником полярен трехгранный угол, с тетраэдром — тетраэдр. Существует тетраэдр, полярный с самим собой; его ребра, плоские и двугранные углы измеряются числами $= \frac{\pi}{2}$.

Для того чтобы построить его, возьмем автополярный треугольник и соединим его вершины с полюсом его плоскости; любой тетраэдр, определяемый этими 4 точками, будет искомым. Такой тетраэдр называется автополярным.

VI. ПАРАЛЛЕЛИ КЛИФФОРДА.

Начнем главу с вопроса об общих перпендикулярах двух скрещивающихся прямых. Прежде всего для двух взаимных поляр вопрос был решен исчерпывающим образом в предыдущей главе. Между прочим, их свойства без особого труда приводят к такому предложению:

109. Если некоторая прямая служит общим перпендикуляром двух данных прямых, то ее поляр будет также их общим перпендикуляром.

После взаимных поляр заслуживает упоминания такой случай двух скрещивающихся прямых, когда каждая из них пересекает поляр другой; мы назвали две такие прямые *противовстречными*. Не входя в подробное исследование их свойств, заметим только, что они имеют два и только два общих перпендикуляра неравной длины.

Определение 31. Такие две скрещивающиеся прямые, которые не являются ни взаимными полярными, ни *противовстречными*, называются *косыми*.

В дальнейшем мы остановимся именно на случае двух косых прямых.

[110]. Даны две косых пр. a и b . Если перпендикуляры, опущенные из двух различных точек прямой b на a , имеют одинаковую длину, то можно построить общий перпендикуляр данных прямых (само построение указывается при доказательстве).

Пусть из т. C и D прямой b опущены перпендикуляры на a и пусть их основаниями служат т. A и B (черт. 19), причем отрезки $[AC]$ и $[BD]$, меньшие ппр., равны между

собой по заданию. Под символом $[AB]$ условимся понимать раз навсегда определенный отрезок. Далее по ребрам $[AC]$, $[BD]$ и $[AB]$ определим тетраэдр $ABCD$; остальные ребра $[BC]$, $[AD]$ и $[CD]$ вполне определяется как третьи стороны соответствующих треугольников, служащих гранями. Прежде всего

$$\triangle ABC = \triangle ABD,$$

откуда

$$[BC] = [AD].$$

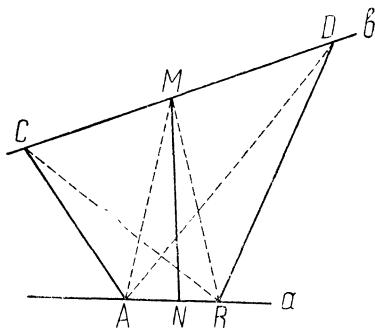
Затем

$$\triangle ACD = \triangle BDC,$$

откуда

$$\angle ACD = \angle BDC.$$

Отметим на ребрах $[CD]$ и $[AB]$ их середины M и N и докажем, что пр. MN будет искомым общим перпендикуляром. Определим



Черт. 19.

треугольник AMB как трансверсальное сечение нашего тетраэдра, а треугольники ACM и BDM получим из треугольников ACD и BDC соответственно по указанию теоремы 31. Легко видеть, что

$$\triangle ACM = \triangle BDM,$$

так что

$$[AM] = [BM],$$

Далее, опять-таки по теореме 31, от треугольника AMB перейдем к треугольникам ANM и BNM , которые оказываются равными; следовательно,

$$\angle ANM = \angle BNM,$$

или:

$$MN \perp \alpha,$$

Подобным же образом доказывается, что

$$MN \perp b,$$

а потому MN есть общий перпендикуляр.

111. Две косые прямые всегда имеют два общих перпендикуляра, которые суть взаимные поляры.

Действительно, пусть даны две косых пр. a и b ; из т. C и D прямой b опустим перпендикуляры на пр. a и пусть их основаниями служат т. A и B . Если длины перпендикуляров $[CA]$ и $[BD]$ оказываются равными, то теорема 110 дает один общий перпендикуляр. Пусть эти длины различны; тогда, взяв какую-нибудь промежуточную длину между $[CA]$ и $[DB]$, в силу непрерывного изменения длины перпендикуляра *), найдем на каждом из отрезков $[CD]$ по такой точке, что длины перпендикуляров, опущенных из этих точек на пр. a , будут равны вышеуказанной промежуточной длине. Теперь теорема 110 снова даст общий перпендикуляр для a и b ; для получения другого перпендикуляра можно сослаться на теорему 109.

112. Если две косые прямые имеют два общих перпендикуляра одинаковой длины, то всякий перпендикуляр, опущенный из любой точки одной прямой на другую, будет общим перпендикуляром данных прямых и его длина равна длине данных перпендикуляров.

Пусть косые пр. a и b имеют два общих перпендикуляра $[AC]$ и $[BD]$ одинаковой длины, причем эта длина не может $= \frac{\pi}{2}$, ибо здесь исключен случай взаимных поляр (106). Остановимся на том отрезке $[AB]$, который содержит т. M , произвольно заданную на пр. a (черт. 20); пусть N будет основанием перпендикуляра, опущенного из M на b . Определим косой 4-угольник $ABDC$ по сторонам $[AC]$, $[AB]$ $[BD]$ (сначала можно определить соответствующую 4-гранную поверхность); имеем

$$\triangle ACD = \triangle BDC,$$

*) Ради краткости, мы ограничиваемся такой интуитивной ссылкой на непрерывность длины перпендикуляра; но на основании уже известного ее можно обосновать строгим образом.

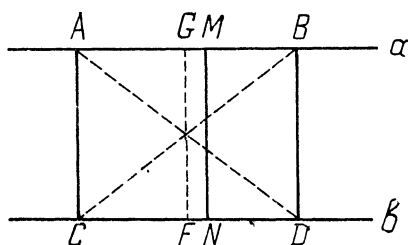
откуда

$$[AD] = [BC].$$

Переходя к треугольникам ACB и ACD , отметим, что углы при т. B и D оба острые (55); следовательно, указанные треугольники равны (по тому признаку равенства который обычно называется „четвертым“), откуда

$$[AB] = [CD].$$

Соединяя середины этих отрезков, получим новый общий перпендикуляр FG данных пр. (110), причем его



Черт. 20.

длина будет равна длине $[AC]$; в последнем убеждаемся при помощи рассуждения, подобного только-что приведенному (ибо $[AG] = [CF]$). Берем далее ту из половин

отрезка $[AB]$, которая содержит т. M , и, снова соединяя середины, получаем новый общий перпендикуляр с той же самой длиной, и т. д. Продолжая эти построения, мы или попадаем в т. M и тогда теорема будет доказана или дойдем до т. P , отстоящей от M на расстояние $< \varepsilon$, где ε произвольно малое положительное число; при этом перпендикуляр $[PQ]$, опущенный из P на b , будет общим перпендикуляром, по длине равным данным. Вследствие непрерывности изменения длины перпендикуляра, легко убедиться, что

$$[MN] = [PQ].$$

Наконец, берем косоу 4-угольник $MNQP$ и подобно предыдущему из равенства треугольников найдем, что

$$MN \perp a.$$

Таким образом теорема доказана полностью.

113. Если две косые прямые имеют два общих пер-

пендикуляра, которые не суть взаимные поляры, то всякий перпендикуляр, опущенный из любой точки одной прямой на другую, будет их общим перпендикуляром, и все общие перпендикуляры имеют одинаковую длину.

Действительно, пусть у косых пр. a и b имеются два общих перпендикуляра AC и BD , которые не суть взаимные поляры; тогда, на основании 109, пр. A_1C_1 — поляра пр. AC — будет также общим перпендикуляром. Будем под символами $[AC]$, $[BD]$, $[A_1C_1]$ понимать отрезки $<$ ппр. (они не могут быть $=$ ппр., если только a и b — косые пр.). Если какие-либо два из этих отрезков равны, то дело сводится к теореме 112; в противном случае, в силу непрерывности, между наименьшим и наибольшим перпендикулярами найдем такой, который по длине будет равен промежуточному, но будет опущен из точки другого отрезка; дело снова сведется к теореме 112.

114. Если даны две косые прямые, то либо они имеют только два общих перпендикуляра неравной длины, принадлежащих двум взаимным полярам, либо всякий перпендикуляр, опущенный из произвольной точки одной прямой на другую, будет общим, и все общие перпендикуляры равны между собой.

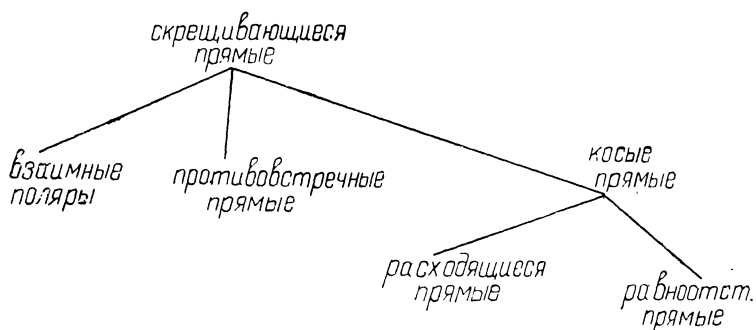
Две косые прямые всегда имеют два общих перпендикуляра, лежащих на двух взаимных полярах (111). Если их длины оказываются равными, то здесь мы имеем второй случай нашей теоремы (112). Если же длины указанных перпендикуляров не одинаковы, то никакого третьего общего перпендикуляра не может быть, так как иначе теорема 113 привела бы нас к противоречию; следовательно, здесь получается первый случай.

О п р е д е л е н и е 32. Две косые прямые, имеющие лишь два общих перпендикуляра неравной длины, называются расходящимися. Две косые прямые, имеющие бесконечное множество общих перпендикуляров одинаковой длины, называются равноотстоящими или парал-

лелями Клиффорда; указанное соотношение условимся обозначать косым знаком параллельности $\parallel$.

На существование равноотстоящих прямых впервые (1873 г.) указал Клиффорд*); в виду некоторого сходства их с параллелями евклидовой геометрии, он назвал их „параллелями“.

Приведем теперь полностью нашу классификацию скрещивающихся прямых:



Упомянем еще, что для двух расходящихся пр. длины общих перпендикуляров дают наименьшее и наибольшее расстояние точек одной прямой от другой, а затем перейдем к изучению свойств „параллелей“ Клиффорда.

В указанном вопросе; по вполне понятным причинам, мы ограничимся только некоторыми основными штрихами: его полное исследование было бы слишком громоздко.

115. Два общих перпендикуляра к двум равноотстоящим прямым сами будут равноотстоящими прямыми или взаимными полярами.

Пусть $[AC]$ и $[BD]$ будут общими перпендикулярами равноотстоящих пр. a и b (черт. 20). Прежде всего пр.

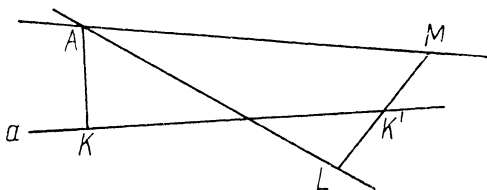
*) Клиффорд, Предварительный очерк бикватернионов, стр. 332 (приложение к книге „Здравый смысл точных наук“, пер. А. Р. Кулишер, Москва, 1910).

AC и BD будут скрещивающимися, так как в противном случае пр. a и b лежали бы в одной плоскости, что противоречит определению 32. Далее, повторяя рассуждение, приведенное при доказательстве теоремы 112, имеем:

$$[AB] = [CD].$$

Если оба эти отрезка $\equiv$ ппр., то AC и BD — взаимные поляры (106); если же нет, то $AC \not\parallel BD$, так как эти прямые имеют два общих перпендикуляра AB и CD , которые не могут быть взаимными полярами (113, опр. 32), а случай противостречных прямых устраняется равенством $[AB]$ и $[CD]$.

116. Если на двух взаимных полярах отложим равные



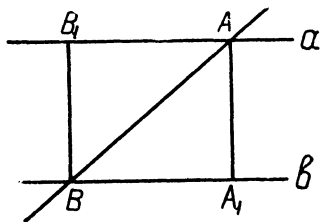
Черт. 21.

(меньшие ппр.) отрезки $[AB]$ и $[CD]$, то получим две пары равноотстоящих прямых: AC и BD , AD и BC .

Действительно, прежде всего обе пары дают скрещивающиеся прямые, ибо взаимные поляры обладают этим свойством; но ни одна пара не может дать взаимных поляр, так как в этом случае данные отрезки были бы $\equiv$ ппр. (105). Далее, на основании той же теоремы 105, отрезки $[AB]$ и $[CD]$ являются общими перпендикулярами для прямых каждой пары, и равенство их длин исключает случай противостречных прямых. Остается сослаться на теорему 112 и определение 32.

117. Дана пр. a и вне ее т. A , отличная от ее полюса в плоскости aA ; через данную точку можно провести две и только две прямые, равноотстоящие от данной прямой (построение их см. в доказательстве).

Опустим из т. A на пр. a перпендикуляр AK (черт. 21) и строим его поляр, которая пересекает пр. a в т. K' , противоположной для K (106). От т. K' на обеих прр. этой поляры откладываем отрезки $[K'L]$ и $[K'M]$, равные тому отрезку $[AK]$, который $<$ прр. Тогда пр. AL и AM будут искомыми (116). Легко видеть, что других решений не может быть: всякая прямая, равноотстоящая от a и проходящая через A , должна пересекать поляр общего перпендикуляра AK (106) и притом в точке



Черт. 22.

отстоящей от K' на расстояние $= [AK]$; но таких точек имеется только две: L и M .

Если A есть полюс для пр. a , то обе пр. AL и AM совпадут в одну, а именно — в поляр прямой a . Клиффорд различает две параллели, говоря о „право- и ле-

во-параллелях“; чтобы коснуться этого различия, надо предварительно разработать учение о смысле геометрических образов (см. ниже).

118. Один из углов, образуемых обеими прямыми, проходящими через данную точку и равноотстоящими от данной прямой, измеряется числом, вдвое большим длины общего перпендикуляра.

Действительно, одному из этих углов будет соотнесен отрезок $[LM] = 2[AK]$ (черт. 21).

Определение 33. Пусть две равноотстоящие пр. a и b пересечены третьей прямой соответственно в т. A и B . Если пр. AB служит общим перпендикуляром, при т. A и B получаем прямые углы. В противном случае проводим общие перпендикуляры AA_1 и BB_1 (черт. 22); тогда накрест лежащими углами при т. A и B называются те углы, которые опираются на наименьшие отрезки $[BB_1]$ и $[AA_1]$; если же один из этих углов заме-

нить на смежный, то получим односторонние углы.

Заметим, что прибавка „внутренний“ или „внешний“ здесь была бы неуместна, так как в эллиптической геометрии это по существу один и тот же угол.

119. Если две равноотстоящие прямые пересечь какой-либо третьей прямой, то накрест лежащие углы равны, а односторонние в сумме дают два прямых.

Будем придерживаться обозначений и построений, сделанных в определении 33 (черт. 22). Если пр. AB есть общий перпендикуляр данных прямых, то предложение очевидно; в противном случае определяем треугольники AA_1B и BB_1A по общей стороне $[AB]$, взяв ее $\leq$ ппр., и по наименьшим отрезкам $[AA_1]$ и $[BB_1]$. На основании теоремы 55 и „четвертого“ случая равенства треугольников, имеем:

$$\triangle AA_1B = \triangle BB_1A,$$

откуда и следует теорема.

Равноотстоящие прямые приводят к неплоскому четырехугольнику, который обладает некоторыми свойствами евклидова параллелограмма.

Определение 34. Если в косом четырехугольнике противоположные стороны равны и принадлежат равноотстоящим прямым, а сумма двух соседних углов равна двум прямым, то он называется косым параллелограммом.

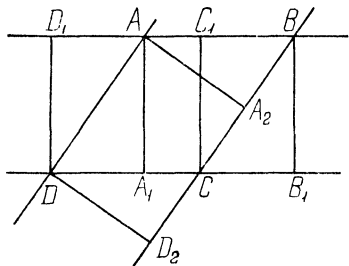
Легко видеть, что при равенстве противоположных сторон в косом четырехугольнике противоположные углы тоже равны, так что если два соседних угла в сумме равны двум прямым, то это же имеет место и для всяких двух соседних углов. Существование косых параллелограммов вытекает, например, из следующей теоремы.

120. Если $AB \not\parallel CD$ и отрезки $[AB] = [CD]$, то, соединяя соответствующим образом концы первого отрезка с концами второго, получим косой параллелограмм.

Полное доказательство этой теоремы требует рассмотрения всевозможных случаев, которые могут предста-

виться в расположении точек, и заняло бы слишком много места; поэтому мы считаем целесообразным с достаточной подробностью рассмотреть только один случай.

Именно, мы остановимся на следующих допущениях, имея в виду черт. 23. Из точек A и B проведем общие перпендикуляры $[AA_1]$ и $[BB_1]$ данных равноотстоящих прямых и будем считать, что т. A_1 , B_1 , C и D — все-различны между собой. Проведем также общие перпендикуляры $[CC_1]$ и $[DD_1]$; сейчас же отметим, что если



Черт. 23.

в группах точек A_1 , B_1 , C , D и A , B , C_1 , D_1 соответственными считать точки, принадлежащие одному и тому же перпендикуляру, то формула разделения пар, верная для точек одной прямой, останется верной и для другой, при замене входящих туда точек на соответственные;

утверждение это вытекает из теоремы 37 и из того обстоятельства, что каждые две соответственные точки лежат в одной и той же плоскости, проходящей через полюсу прямой CD (104).

Именно мы допустим, что имеют место следующие разделения пар:

$$A_1B_1 \mid CD \text{ и } AB \mid C_1D_1;$$

далее мы примем, что равные отрезки:

$$[AB] = [CD] \leq \text{ппр.}$$

Указанное выше разделение говорит, что отрезок $[AB]$ содержит одну из точек C_1 и D_1 ; пусть для определенности $[AB]$ содержит т. C_1 , а для другого отрезка:

$$[CD] \text{ содержит т. } A_1.$$

Теперь мы имеем дело с вполне определенным случаем теоремы; желая получить косою параллелограмм, надо

в рассматриваемом случае соединить A с D и B с C .

Легко видеть, что отрезок $[A_1B_1]$, не превышающий ппр., будет $= [AB]$; необходимое рассуждение было уже однажды проделано во всех подробностях [в теореме 112]; следовательно,

$$[A_1B_1] = [CD].$$

Поэтому если под символами $[CB_1]$ и $[DA_1]$ понимать части указанных отрезков, то

$$[CB_1] = [DA_1].$$

Таким образом, если треугольник CBB_1 определить по $[BB_1] < \text{ппр.}$ и $[CB_1]$, а треугольник DAA_1 — по $[AA_1] < \text{ппр.}$ и $[DA_1]$, то

$$\triangle CBB_1 = \triangle DAA_1,$$

откуда

$$[CB] = [DA] < \text{ппр.} \quad (56)$$

$$\angle BCB_1 = \angle ADA_1.$$

Наконец, определим косоу 4-угольник $ABCD$ по отрезкам $[AD]$, $[AB]$, $[CD]$; его четвертая сторона $[BC]$ тождественна с гипотенузой треугольника CBB_1 (доказывается это с помощью повторного применения теоремы 34).

Следовательно, в нашем косом четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны оказываются равными; отсюда нетрудно вывести равенство противоположных углов.

Обращаемся к указанному выше равенству углов; угол ADA_1 тождествен с углом ADC косоуго четырехугольника (для доказательства от треугольника ADC переходим к треугольнику ADA_1 по теореме 31); но угол BCB_1 будет смежным с углом DCB , так как отрезки $[CB_1]$ и $[CD]$ принадлежат различным ппр. (33). Поэтому упомянутое равенство приводит к соотношению:

$$\angle ADC + \angle DCB = \pi;$$

подобное же имеет место для любой пары соседних уг-

лов. Остается доказать, что $BC \not\parallel AD$. Заменяя угол ADC равным ему углом ABC , находим

$$\angle ABC + \angle DCB = \pi,$$

и пусть угол ABC — острый, а угол DCB — тупой. Опустим из т. A и D перпендикуляры AA_2 и DD_2 на пр. BC т. D_2 не может упасть внутрь отрезка $[BC]$, так как иначе теоремы 55 и 56 привели бы к тому, что $[CD] >$ ппр. Определим треугольник BAA_2 по $[AB]$ и острому углу B , а треугольник CDD_2 — по $[CD]$ и острому углу C ; на основании вышеуказанного соотношения эти углы равны, так как угол C является смежным для угла DCB , а потому

$$\triangle BAA_2 = \triangle CDD_2,$$

откуда

$$[AA_2] = [DD_2]$$

$$[A_2B] = [D_2C].$$

Последнее равенство сейчас же приводит к другому

$$[A_2D_2] = [BC]$$

(это очевидно при расположении элементов, указанном на черт. 23; в других случаях доказательство так же просто).

Таким образом в косом четырехугольнике ADD_2A_2 , определенном подобно ABB_1A_1 , противоположные стороны равны; отсюда сейчас же вытекает, что углы при т. A и D будут прямыми, как и углы при т. A_2 и D_2 . Мы убеждаемся, что пр. BC и AD имеют два общих перпендикуляра $[AA_2]$ и $[DD_2]$ одинаковой длины, а потому

$$BC \not\parallel AD \text{ (112, опр. 32),}$$

ч. и т. д.

Существование косых параллелограммов установлено и притом с помощью теоремы, вызывающей соответствующие воспоминания из области евклидовой геометрии. В определении 34 были указаны три признака косого параллелограмма. Ближайшее исследование (в которое

мы здесь входить не будем) показывает, что если отвлечься от исключительных случаев, то вообще два из этих признаков влекут за собой и третий. Однако клиффордовой параллельности противоположных сторон надо приписать особое значение: если в косом четырехугольнике $ABCD$ имеем $AB \nparallel CD$ и $AD \parallel BC$, то либо данный четырехугольник, либо другой, имеющий те же вершины, будет косым параллелограммом (утверждение это будет неверным лишь в некоторых особых случаях). Другие же признаки косого параллелограмма таким свойством не обладают.

Для того чтобы перейти к дальнейшим свойствам параллелей Клиффорда, докажем одно вспомогательное предложение; но еще раньше коснемся одного случая равенства треугольников, который сейчас понадобится.

В эллиптической геометрии, равно как и в евклидовой, два треугольника равны по двум сторонам и углам, противолежащим одной паре равных сторон, при условии что углы, противолежащие другой паре равных сторон, в сумме не $= \pi$ („четвертый“ случай равенства). Переход к взаимно-полярным треугольникам дает в эллиптической геометрии новый признак равенства („пятый“), который получается из четвертого путем перестановки терминов „сторона“ и „угол“.

Обращаемся к упомянутому вспомогательному предложению.

[121]. Пусть $AB \parallel CD$ и $AD \parallel BC$; тогда углы, произвольно выбранные при двух точках пересечения, либо равны, либо в сумме дают π ; точно также любые отрезки $[AB]$ и $[CD]$, $[AD]$ и $[BC]$ либо равны, либо в сумме дают π .

Первая половина теоремы вытекает из предложения 119; вторую легко вывести из одного предложения о косом параллелограмме, недавно приведенном без доказательства, но мы предпочтем доказать ее независимо. Если один из углов при т. A, B, C, D — прямой, то по первой половине теоремы и все остальные прямые, т. е. AD и BC будут общими перпендикулярами равноотстоящих пр. AB и CD .

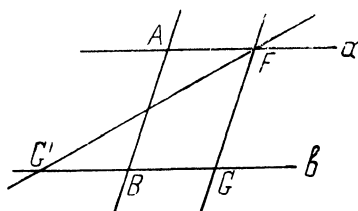
Такой случай нам уже встречался (например при доказательстве теоремы 112); тогда один из отрезков $[AB]$ равен одному из отрезков $[CD]$. В противном случае проведем общие перпендикуляры $[AA_1]$ и $[BB_1]$, понимая под этими символами отрезки $\ll$ прр. (можно иметь в виду черт. 23). Возьмем треугольник DAA_1 , где $[AA_1]$ есть именно этот отрезок, и треугольник CBB_1 , где также задается сторона $[BB_1]$; остальные элементы их ближайшим образом не определяем. В этих треугольниках углы при т. D и C — оба острые (55), так что они равны (121, п. 1); тогда к треугольникам DAA_1 и CBB_1 можно применить пятый признак равенства и получить, что

$$\text{либо } [AD] = [BC],$$

$$\text{либо } [AD] + [BC] = \pi,$$

ч. и т. д.

122. Пусть $a \not\parallel b$ и третья прямая пересекает эти пря-



Черт. 24.

мые соответственно в т. A и B ; на пр. a задана еще т. F , отличная от полюса прямой AB . Тогда из двух прямых, проходящих через т. F и равноотстоящих от AB , одна всегда пересекает прямую b (черт. 24).

Если $AB \perp a$, то решение дается теоремой 115; в других случаях от т. B на пр. b отложим на различных прр. отрезки $[BG]$ и $[BG']$, равные тому отрезку $[AF]$, который не превышает прр. Теорема 121 показывает, что искомая прямая может быть лишь одной из двух прямых FG и FG' . К отрезкам $[AF]$ и $[BG]$ можно применить теорему 120; если для построения косоугольного параллелограмма придется соединить т. A с B и F с G , то

$$FG \not\parallel AB$$

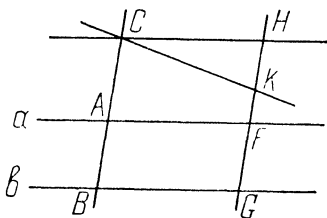
и задача решена. Но возможно, что придется соединять A с G и F с B ; тогда перейдем к отрезкам $[AF]$ и $[BG']$. Расположение элементов, которое определяет порядок соединения точек, при этом меняется таким образом что

придется соединить A с B и F с G' , так что теперь $FG' \not\parallel AB^*)$.

Если $[AF] = \text{ппр.}$, точка G' совпадает с G и прямая FG будет искомой.

123. Если даны две равноотстоящие пр. a и b и еще дана т. C , не принадлежащая ни данным прямым, ни их полярам, то через т. C можно провести одну и только одну прямую, равноотстоящую и от a и от b .

Действительно, проведем через C прямую, пересекающую данные прямые соответственно в т. A и B (черт. 25); эта прямая получается как пересечение плоскостей aC и bC . На пр. a возьмем т. F так, чтобы $[AF] = \text{ппр.}$, и через F проведем прямую, равноотстоящую от AB и пересекающую пр. b в т. G (122). Если AB окажется общим перпендикуляром данных прямых, то FG будет полярной AB ; тогда отложим отрезок $[GH] = [BC] < \text{ппр.}$ и при том так, чтобы отношения принадлежности между отрезками $[GH]$ и $[GF]$ были теми же самыми, как и для отрезков $[EC]$ и $[BA]$; теорема 116 показывает, что пр. CH будет решением и при том единственным. Возвращаемся к общему случаю, когда



Черт. 25.

$$FG \not\parallel AB.$$

Из т. C проведем пр. $CH \not\parallel AF$ и пересекающую FG в т. H (122). Если эта CH не будет равноотстоящей от BG , то проводим пр. $CK \not\parallel BG$ (122); так как отрезок $[AF] = \text{ппр.}$, то все отрезки

$$[BG], [CH], [CK] = \text{ппр.} \quad (121).$$

*) В теореме 120 не было приведено подробного перечня всех случаев, но легко сообразить, что так оно и должно быть.

Но в таком случае S есть полюс пр. FG и углы при H, K , а следовательно, при A, B (121) все прямые, т. е. AB есть общий перпендикуляр, что здесь исключено. Итак,

$$CH \not\parallel AF \text{ и } CH \not\parallel BG.$$

Попробуем допустить, что обе клиффордовы параллели из S к a будут таковыми же и по отношению к b . Тогда перпендикуляр к их плоскости в т. S должен пересекать a и b ; сказанное вытекает из построения, приведенного в теореме 117 (черт. 21). Следовательно, этот перпендикуляр совпадает с пр. CAB , ибо такая прямая — единственна, и пр. CAB является общим перпендикуляром для a и b . Но в таком случае двух решений не может быть, так как только один отрезок $[GH]$ удовлетворит всем условиям (см. выше),

124. Даны пр. a и т. B и C , через которые проведено по две прямых равноотстоящих от a , причем C не лежит ни на равноотстоящих из B , ни на их полярах, и подобное же условие имеет место для B . Тогда каждая пр. одной пары будет равноотстоящей от одной и только от одной прямой другой пары.

Доказательство без труда вытекает из теоремы 123.

Определение 35. Если пр. b и c обе равноотстоят от a и кроме того равноотстоят друг от друга, то они называются одноименно равноотстоящими от a ; если же b и c не равноотстоят друг от друга, то они называются разноименно равноотстоящими от a . В первом случае говорят также, что пр. a, b, c равноотстоят друг от друга.

Можно доказать, что у трех прямых, равноотстоящих друг от друга, либо совсем нет общих перпендикуляров, либо каждый общий перпендикуляр для двух из них будет общим перпендикуляром для всех трех; далее (в первом случае) угол, образуемый двумя перпендикулярами, опущенными из произвольной точки одной прямой на

две другие, имеет постоянную величину. Но мы не можем входить в такие частности, а докажем еще два более важных свойства.

125. Если пр. c и d , не являющиеся взаимными полярами, обе равноотстоят от пр. a и b , причем $a \not\parallel b$, то и $c \not\parallel d$.

Попробуем допустить, что $c \parallel d$; тогда из т. С этой прямой можно провести такую пр. c_1 , что

$$c_1 \not\parallel a \text{ и } c_1 \not\parallel d \text{ (123);}$$

точно также можно провести такую пр. c_2 , что

$$c_2 \parallel b \text{ и } c_2 \not\parallel d.$$

Нетрудно усмотреть, что пр. c_1 и c_2 вполне определяются уже заданием трех пр. a , b , c (117); между тем угол между ними определяет расстояние до пр. d (118). Таким образом при произвольном задании d указанное соотношение места иметь не может, так что наша теорема доказана от противного. Положим теперь, что пр. d задана в согласии с упомянутым требованием. Возьмем тогда вспомогательную пр. h , которая имела бы „общее положение“ как по отношению к a , b , c , так и по отношению к a , b , d и которая выполняла бы условия

$$h \not\parallel a \text{ и } h \not\parallel b;$$

по предыдущему докажем, что

$$c \not\parallel h \text{ и } d \not\parallel h.$$

Таким образом c и d теперь равноотстоят от трех пр. a , b , h , которые равноотстоят друг от друга. Попробуем теперь допустить, что $c \parallel d$. Построив пр. c_1 и c_2 , как выше, проведем через C еще одну прямую, которая равноотстояла бы от h и d (123); в силу теоремы 117, она совпадает либо с c_1 , либо с c_2 . Допустим первое; тогда пр. c и c_1 обе равноотстоят от a и h , а это противоречит теореме 123 („только одну“).

Итак

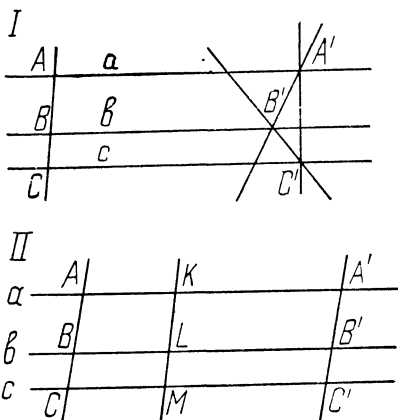
$$c \parallel d,$$

ч. и т. д.

126. Прямые, пересекающие три данные прямые, равноотстоящие друг от друга, будут также равноотстоящими друг от друга (или, как исключение, взаимными полярами).

Пусть нам даны три пр. a, b, c , равноотстоящие друг от друга (черт. 26); возьмем какую-нибудь точку A на

одной из них и проведем пр. ABC , пересекающую две другие; такая прямая вполне определяется как пересечение двух плоскостей $[bA]$ и $[cA]$. Далее отметим на прямой a точку A' , противоположную для A ; из т. A' проведем пр. $\not\parallel AB$ и пересекающую b в т. B' (123), которая будет противоположной для B (121). То-
чно так же проведем пр. $A'C' \not\parallel AB$, причем $[CC']$



Черт. 26.

$\equiv$ ппр.; если, наконец, из C' провести прямую $\not\parallel AB$ и пересекающую b , то она должна будет пройти через B' (121). Допустим, что т. A', B', C' не лежат на одной прямой; тогда перпендикуляры к плоскости $A'B'C'$ в точках A', B', C' должны пересекать AB (однажды мы уже пользовались подобным рассуждением), так что они будут общими перпендикулярами равноотстоящих прямых. В качестве таковых они окажутся или тоже равноотстоящими прямыми, или взаимными полярами (115); между тем, как перпендикуляры к одной и той же плоскости,

они попарно лежат в одной плоскости (это предложение можно доказать без помощи постулата Евклида), и мы приходим к противоречию с определениями 30 и 32. Следовательно, точки A' , B' , C' лежат на одной прямой, равноотстоящей от ABC и тоже пересекающей все три данные прямые (черт. 26-II; если ABC есть общий перпендикуляр, то $A'B'C'$ будет очевидно его полярной).

Возьмем теперь произвольную т. K внутри определенного отрезка $[AA']$; внутри равных ему отрезков $[BB']$ и $[CC']$ возьмем по точке L и M так, чтобы части указанных отрезков были соответственно равны. Так как $A'B' \not\parallel AB$, а т. K и L лежат на тех же прямых $[AA'$, $BB']$ и на равных расстояниях от точек A и B соответственно, то нетрудно будет доказать, что

$$KL \parallel ABC.$$

Точно также докажем, что

$$LM \not\parallel ABC \text{ и } MK \parallel ABC.$$

Если т. K , L , M не лежат на одной прямой, то получится такое же противоречие как и выше; следовательно, прямая KLM пересекает три данные и равноотстоит от AEC . Совершенно ясно, что по тем же основаниям она равноотстоит и от $A'B'C'$. Но т. K выбрана совершенно произвольно, и нам остается вспомнить теорему 125.

VII. ПОВЕРХНОСТЬ КЛИФФОРДА.

О п р е д е л е н и е 36. Геометрическое место точек, отстоящих от данной пр. a на одном и том же расстоянии r , где $r < \frac{\pi}{2}$, называется поверхностью Клиффорда.

Пр. a называется осью, расстояние r — радиусом поверхности; поверхность Клиффорда с осью a и радиусом r условимся обозначать с помощью символа:

$$K(a, r).$$

Эта поверхность, в силу своего определения, является аналогом обыкновенного евклидова цилиндра. На некоторые ее замечательные свойства впервые указал Клиффорд (одновременно с параллелями, носящими его же имя).

127. $K(a, r)$ есть в то же время $K\left(a', \frac{\pi}{2} - r\right)$, где a' — поляр a .

Предложение вытекает из теорем 105, 106 и определения 36.

Таким образом поверхность Клиффорда имеет две оси (которые можно назвать „осями вращения“), которые суть взаимные поляр, и соответственно этому два радиуса, которые дополняют друг друга до ппр.

128. Плоскость, проходящая через ось a , пересекает $K(a, r)$ по окружности, центр которой лежит на оси a' и радиус $= \left(\frac{\pi}{2} - r\right)$; плоскость, перпендикулярная к оси a , пересекает $K(a, r)$ по окружности, центр которой лежит

на этой же оси и радиус $= r$. С соответствующими изменениями эти утверждения имеют место и для оси a' .

Предложение вытекает из теоремы 104 в связи с определением окружности и $K(a, r)$.

Определение 37. Останавливаясь на оси a , мы называем окружности I рода продольными сечениями поверхности Клиффорда, а окружности II рода — ее поперечными сечениями.

129. Через каждую точку поверхности Клиффорда проходят две прямые, равноотстоящие от ее осей на расстояние, равное соответствующему радиусу, образующие угол в $2r$ и целиком принадлежащие поверхности.

Предложение это вытекает из теорем 117, 127, 118 и определений 32, 36.

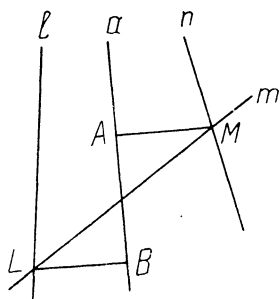
Определение 38. Указанные прямые называются прямолинейными образующими поверхности Клиффорда.

3. Легко видеть, что если некоторая прямая равноотстоит от a , то и ее поляра обладает этим свойством (106, опр. 32; теор. 105); но если расстояние точек данной прямой от a будет $= r$, то для ее поляры это расстояние $= \left(\frac{\pi}{2} - r\right)$. Поэтому обе взаимные поляры могут принадлежать одной и той же $K(a, r)$ лишь при условии, что указанные расстояния равны, т. е. в том случае, когда $r = \frac{\pi}{4}$. Тогда говорят об „особой поверхности Клиффорда“.

130. Две различные прямолинейные образующие поверхности Клиффорда или пересекаются, или равноотстоят друг от друга, или являются взаимными полярами.

Согласно предыдущему замечанию, последний случай может быть лишь на особой поверхности Клиффорда; в дальнейшем он исключается. Пусть даны две образующие l и m . Возьмем на пр. m т. M ; через эту т. M про-

ходит прямая, равноотстоящая и от a и от l (123). Если указанная прямая совпадает с m , то теорема доказана; если же этим свойством обладает другая прямая n , проходящая через M и равноотстоящая от a , то пр. m должна пересекать l . Действительно, проведем общий перпендикуляр MA равноотстоящих пр. a и n (черт. 27; пр. m будет построена в течение рассуждения как другая прямолинейная образующая, проходящая через т. M). Возьмем далее плоскость lM и через пр. l проведем другую плоскость, перпендикулярную к первой; пусть эта новая плоскость пересекает пр. a в точке B . Из т. B проводим общий перпендикуляр BL равноотстоящих пр. a и l ; тогда пр. ML и будет прямолинейной образующей m . Для доказательства рассмотрим косой 4-угольник $AMLB$, в котором $[AM] = [BL] = r$; его углы при вершинах A, B, L — прямые; утверждение относительно L вытекает из того, что пл. $lB \perp$ пл. lM и $BL \perp l$, так что $BL \perp$ пл. lM , а следовательно, и к пр. LM . Рассматривая наш 4-угольник, получаем:



Черт. 27.

пл. lB перпендикулярную к первой; пусть эта новая плоскость пересекает пр. a в точке B . Из т. B проводим общий перпендикуляр BL равноотстоящих пр. a и l ; тогда пр. ML и будет прямолинейной образующей m . Для доказательства рассмотрим косой 4-угольник $AMLB$, в котором $[AM] = [BL] = r$; его углы при вершинах A, B, L — прямые; ут-

тверждение относительно L вытекает из того, что пл. $lB \perp$ пл. lM и $BL \perp l$, так что $BL \perp$ пл. lM , а следовательно, и к пр. LM . Рассматривая наш 4-угольник, получаем:

$$\triangle AMB = \triangle ABL, \text{ откуда } [MB] = [AL].$$

$$\triangle AML = \triangle LBM, \text{ откуда } \angle M = \angle L = \text{прямому}.$$

Таким образом, прямые a и LM имеют два общих перпендикуляра $[AM]$ и $[BL]$ одинаковой длины, а потому $LM \parallel a$ (112, опр. 32).

Следовательно, пр. m совпадает с LM , которая пересекает l , ч. и т. д.

Пользуясь последней теоремой, можно все прямолинейные образующие поверхности Клиффорда разбить на две группы. Выбрав на ней какую-нибудь точку, проводим обе образующие l_1 и l_2 , которые через нее проходят (129);

далее, в I группу относим l_1 и всякую такую образующую m , которая равноотстоит от l_1 [или — в исключительном случае — служит ее полярной (130)], а во II группу попадают прямые n , точно также связанные с l_2 . На основании теорем 129 и 124, каждая прямолинейная образующая попадает в одну из групп, а теорема 125 удостоверяет, что все прямые одной группы равноотстоят друг от друга; наконец, прямые различных групп должны пересекаться. Действительно, если бы оказалось, что $m \parallel n$, то мы имели бы

$$\begin{array}{l} l_1 \not\parallel m; l_1 \not\parallel a; \\ n \not\parallel m; n \not\parallel a; \quad m \not\parallel a, \end{array}$$

откуда вытекало бы, что (125)

$$n \parallel l_1,$$

а это невозможно (124). Также устраняется случай взаимной полярности m и n ; тогда, в силу теоремы 130, прямые m и n должны пересекаться. Сделанная характеристика обеих групп показывает, что это деление не зависит от выбора исходных образующих l_1 и l_2 . Надо добавить, что пересечение с тремя скрещивающимися прямыми уже вполне определяет соответствующую совокупность прямых (с таким заключением мы, например, встретились при доказательстве теоремы 126).

Этот ход мыслей мы закончим следующей теоремой:

131. Всякие три прямые, равноотстоящие друг от друга, вполне определяют поверхность Клиффорда, для которой они являются прямолинейными образующими.

Пусть нам даны пр. k, l, m (черт. 28); построим такую прямую, которая равноотстоит от всех них на одном и том же расстоянии. Для этого проведем пр. g , пересекающую данные соответственно в точках K, L, M ; указанное пересечение происходит под равными углами (119) и наименьший из последних обозначим через $2r$. В точке K к плоскости kg восставим перпендикуляр и на его раз-

шого труда доказать ее единственность; обозначим ее через a . Теперь поверхность Клиффорда с осью a и радиусом r и будет той, о которой идет речь в доказываемой теореме.

Теперь мы отметим еще некоторые другие свойства поверхности Клиффорда.

132. Два одноименных сечения поверхности Клиффорда не имеют общих точек.

Возьмем, для определенности, два сечения, поперечных относительно оси a ; если бы они пересекались, то их общие точки лежали бы на оси a' , которая служит линией пересечения для плоскостей данных окружностей (104); но тогда эти точки отстояли бы от оси a на расстояние $= \frac{\pi}{2}$, что противоречит определению 36.

133. Два разноименных сечения всегда пересекаются в двух диаметрально противоположных точках.

Действительно, плоскости двух разноименных сечений пересекаются по прямой, перпендикулярной к обоим осям (105), и на этой прямой должны лежать искомые точки пересечения. Отсюда уже видно, что их не может быть больше двух; две же на самом деле будут в силу определений 36 и 37; указанная прямая проходит через центры окружностей (128) и пересекает каждую из них в двух диаметрально противоположных точках.

134. Два разноименных сечения поверхности Клиффорда пересекаются под прямым углом.

В самом деле, плоскости таких сечений взаимно перпендикулярны (104), а касательные к нашим окружностям лежат соответственно в этих плоскостях и перпендикулярны к прямой их пересечения.

135. Дуги, выделяемые на двух сечениях одного рода двумя сечениями другого рода, равны между собой.

Возьмем два поперечных сечения и пересечем их двумя

продольными; плоскости последних образуют некоторый двугранный угол. Легко видеть, что центральные углы дуг, получаемых на поперечных сечениях, суть линейные углы указанного двугранного угла, а потому они равны между собой. Но в таком случае и дуги равны (в силу определения), ч. и т. д.

136. Прямолинейные образующие поверхности Клиффорда составляют постоянные углы с ее поперечными и продольными сечениями; если для поверхности $K(a, r)$ в основу положить ось a и остановиться на острых углах, то эти углы соответственно равны:

$$\left(\frac{\pi}{2} - r \right) \text{ и } r.$$

Для доказательства возьмем какую-нибудь прямолинейную образующую m и на ней произвольную т. M ; из этой точки проведем общий перпендикуляр h равноотстоящих пр. m и a . Наша образующая лежит в плоскости, проходящей через M и перпендикулярной к h ; в этой же плоскости лежат обе касательные к поперечному и продольному сечениям в т. M , ибо они обе перпендикулярны к той же прямой, на которой лежит h . По закону построения равноотстоящих прямых (см. теорему 117 и черт. 21) плоскость nm образует с плоскостью продольного сечения острый угол $= r$ [на черт. 21 это будет угол между пл. AKM и AKK' ; ему соотнесен отрезок $[K'M] = [AK] = r$]. Но линейным углом этого двугранного угла будет как раз угол между m и касательной к продольному сечению, ибо эти прямые перпендикулярны к h и лежат в гранях указанного угла; следовательно, интересующий нас угол $= r$. Теорема 134 говорит тогда, что острый угол между m и касательной к поперечному сечению равен $\left(\frac{\pi}{2} - r \right)$, ч. и т. д.

VIII. ВЫВОД ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАВИСИМОСТЕЙ.

В работах, посвященных неевклидовой геометрии, имеются различные выводы интересующих нас формул. Большинство авторов так или иначе используют одну и ту же основную мысль, восходящую, повидимому, к Гауссу; это — мысль об евклидовой геометрии в бесконечно малой области, как об исходном положении для вывода тригонометрических формул. В дальнейшем возможен двоякий путь: или интегрирование, или решение функционального уравнения. Первым путем шел, например, Киллинг в названных выше работах; строгое и полное развитие этого метода находим в мемуаре Юнга *). Переходом к работам II группы служит мемуар де-Тилли **), где автор развивает „общую тригонометрию“; собственно же первоисточником работ второй группы является мемуар Жерара от 1893 г. ***), где идет речь исключительно о гиперболической геометрии. К системе Римана этот метод был применен Мансионом ****); с точки

*) Young. On the analytical basis of non-euclidean Geometry. (American Journal of Math., v. 33).

**) de-Tilly. Essai sur les principes fondamentaux de la Géométrie et de la Mécanique. (Mém. de la Soc. des Sciences de Bordeaux, 2-me série, t. III).

***) Cérard. Sur la Géométrie non Euclidienne. (Nouv. Annales de Math., 3-me série, t. 12).

****) Mansion. Essai d'exposition élémentaire des principes fondamentaux de la Géométrie non Euclidienne de Riemann. (Mathesis, 2-me série, t. 5).

зрения строгости метод Жерара получил завершение у Кулиджа *), но изложение стало довольно громоздким. По существу тот же путь встречаем у Бонолы **) и с некоторыми своеобразными отклонениями у Либмана ***). После этих справок уместно будет набросать общий план того вывода тригонометрических зависимостей, который предлагается в настоящей работе. Мы начинаем с одного предельного процесса, ведущего по существу к определению длины окружности (это — общая мысль Либмана); именно, рассматриваются периметры правильных n -угольников, вписанных в окружность радиуса r , где $n = 2^k$ и k есть целое положительное число, беспрестанно возрастающее. Существование предела позволяет ввести функцию

$$\lambda(r),$$

и главная цель последующих изысканий — доказать тождество этой функции с синусом. С этой целью вводятся две вспомогательные функции, а именно: катет прямоугольного треугольника и отношение катета к гипотенузе рассматриваются как функции противолежащего угла и гипотенузы; устанавливаются некоторые свойства этих функций в предположении, что гипотенуза по особому закону стремится к нулю. Важной задачей является освобождение от указанного ограничения; в этом вопросе решающее значение имеет теорема, по существу тождественная с теоремой Бонолы о проекциях отрезков. После этого оказывается возможным, взяв на помощь соотнесенный трехгранный угол (идея того же Бонолы), получить для прямоугольного при т. С треугольника ABC зависимость

$$\lambda(a) = \lambda(c) \cdot \lambda(A),$$

*) Coolidge. The Elements of Non-Euclidean Geometry. (Oxford 1909).

**) Бонола. Теория параллельности и неевклидовы геометрии. (Сборник Энриквеса).

***) Liebm ann. Nichteuklidische Geometrie (2 издание, 1912).

откуда вытекает ряд других при помощи замкнутой цепи соотнесенных прямоугольных треугольников (мысль прибегнуть вообще к этому средству принадлежит Либману). Найденные зависимости позволяют составить функциональное уравнение и с его помощью решить основную задачу.

Само собою разумеется, что функции

$$\sin x \text{ и } \cos x$$

надо мыслить здесь определенными с помощью известных рядов, так как обычное элементарное определение их существенным образом связано с теоремами евклидовой геометрии.

Введем следующие обозначения. Пусть дана окружность радиуса r , где $0 < r < \frac{\pi}{2}$; периметры правильных вписанных и описанных n -угольников обозначаем соответственно через:

$$\rho_n \text{ и } P_n.$$

Начнем с вписывания и описывания правильного 4-угольника, а потом будем безгранично удваивать число сторон вписанного многоугольника; получаем ряд обводов

$$\rho_4, \rho_8, \rho_{16}, \dots, \rho_n, \dots$$

где $n = 2^k$ и k — целое положительное число, беспрестанно возрастающее. Угол при центре в таком n -угольнике равен:

$$\frac{\pi}{2^{k-1}}.$$

137. Предел $(\rho_n)_{n \rightarrow \infty}$ существует, положителен, меньше 2π и возрастает вместе с r .

Действительно:

1) С возрастанием n (по закону $n = 2^k$) обвод ρ_n возрастает (80) и остается всегда $< P_n$, ибо всегда заключается внутри его; следовательно, ρ_n стремится к определенному пределу.

2) Так как $\rho_n > 0$ и возрастает, то и $\lim (\rho_n) > 0$.

3) На основании теоремы 74 всегда имеем

$$\rho_n < 2\pi,$$

откуда

$$\lim(p_n) \leq 2\pi. \quad (\text{см. еще п. 5})$$

4) Возьмем 2 различных значения r' и r'' для радиуса, причем

$$r'' > r';$$

тогда

$$p_n'' > p_n'. \quad (81)$$

Докажем, что при $n \rightarrow \infty$ (по вышеуказанному закону) разность $p_n'' - p_n'$ остается конечной. На основании теоремы 82, около $O[r']$ описываем, а в $O[r'']$ вписываем правильные m -угольники, где $m = 2^{k_0}$; тогда

$$p_n' < P_m' \text{ при всяком } n,$$

и можно найти такое $k (k > k_0)$, при котором

$$p_n'' > p_m''; \quad (80)$$

следовательно,

$$p_n'' - p_n' > p_m'' - P_m',$$

начиная с некоторого значения n ; но разность $(p_m'' - P_m')$ есть определенное положительное число, ибо, по условиям теоремы 82, обвод P_m' целиком лежит внутри обвода p_m'' . Если же $p_n'' > p_n'$ и разность $p_n'' - p_n'$ не бесконечно мала, то

$$\lim(p_n'') > \lim(p_n'),$$

ч. и т. д.

5) Теперь мы можем вернуться к п. 3 и устранить там возможность равенства. Действительно, если бы предел оказался $= 2\pi$, то при увеличении радиуса мы должны были бы получить число $> 2\pi$ (п. 4), что невозможно (п. 3).

Определение 39. Функция $\lambda(r)$ определяется из равенства:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (p_n) = 2\pi\lambda(r).$$

Предыдущая теорема непосредственно дает нам некоторые свойства этой функции, а именно: в промежутке $0 < r < \frac{\pi}{2}$ функция $\lambda(r)$ есть однозначная возрастающая функция от r , удовлетворяющая неравенствам

$$0 < \lambda(r) < 1.$$

Теперь, не вступая в противоречие с другими свойст-

вами рассматриваемой функции, мы вправе пополнить ее определение следующим образом:

Определение 39а.

$$\lambda(0) = 0 \text{ и } \lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

[138]. При всяком r , неравном нулю, имеем

$$\frac{\lambda(r)}{r} < \frac{4}{\pi}.$$

Действительно,

$$p_n < P_4,$$

так что

$$\lim (p_n) \leq P_4,$$

откуда

$$2\pi\lambda(r) < 8r$$

83), ч. и т. д.

Имея в виду ввести некоторые вспомогательные функции, возьмем треугольник ABC , прямоугольный при C , и обозначим его элементы по обычному способу: гипотенуза c , катеты a и b , противолежащие им углы A и B .

Задание угла A и гипотенузы c вполне определяет наш треугольник ABC , поскольку речь идет о величинах его элементов („пятый“ признак равенства в связи с теоремой 55), так что катет a вполне определяется заданием указанных двух величин. Это дает основание для введения одной вспомогательной функции:

Определение 40.

$$a = \mu(A, c).$$

Легко видеть, что для значений переменных независимых, удовлетворяющих неравенствам

$$0 < A, c < \frac{\pi}{2},$$

функция $\mu(A, c)$ однозначна и принимает лишь положительные значения.

139.

$$\mu(A, c) = \mu(c, A).$$

Для доказательства этого равенства надо сопоставить

треугольники 1 и 4 из замкнутой цепи соотнесенных прямоугольных треугольников (см. теорему 67).

140. Если $A = \text{const}$ и c стремится к 0 по закону

$$c = \frac{\pi}{2^k},$$

где k — целое положительное число, безгранично возрастающее, то отношение

$$\frac{\mu(A, c)}{c},$$

возрастая стремится к пределу $= \lambda(A)$.

Возьмем окружность с радиусом $= A$ и пусть a_n обозначает сторону правильного n -угольника, вписанного в эту окружность, причем $n = 2^k$. Угол при центре, опирающийся на хорду a_n , равен

$$\frac{2\pi}{n} = \frac{\pi}{2^{k-1}};$$

половину этого угла мы обозначим через c , так что

$$c = \frac{\pi}{2^k}.$$

Деля пополам упомянутый угол при центре и пользуясь теоремой 31, приходим к прямоугольному треугольнику, у которого один катет $= \frac{a_n}{2}$, противолежащий угол $= c$, а гипотенуза $= A$; на основании определения 40 пишем

$$\frac{a_n}{2} = \mu(c, A);$$

далее имеем

$$\lim (n a_n)_{n \rightarrow \infty} = 2\pi \cdot \lambda(A), \quad (\text{опр. 39})$$

откуда

$$\lim \left[\frac{n a_n}{2\pi} \right] = \lambda(A);$$

но, согласно предыдущим обозначениям:

$$\frac{n a_n}{2\pi} = \frac{\mu(c, A)}{c} = \frac{\mu(A, c)}{c}. \quad (139)$$

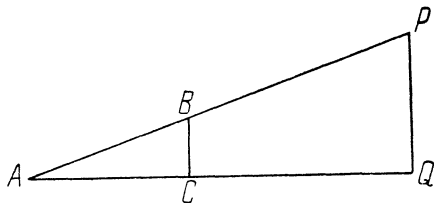
Подставляя, находим:

$$\lim_{c \rightarrow 0} \left[\frac{\mu(A, c)}{c} \right] = \lambda(A),$$

причем наше отношение, равное $\frac{p_n}{2\pi}$, будет возрастать в силу теоремы 80.

141. Если одна из переменных независимых A и c бесконечно мала, а другая как угодно меняется в границах между 0 и $\frac{\pi}{2}$, то функция $\mu(A, c)$ тоже бесконечно мала.

Пусть сначала бесконечно малой будет угол A ; возьмем прямоугольный треугольник ABC и, отметив на прямых AB и AC соответственно



Черт. 29.

точки P и Q , противоположные для A (черт. 29), перейдем к треугольнику APQ с помощью теоремы 32. Сторона $[PQ]$ будет отрезком, соотнесенным противолежащему углу, так что измеряется тем же числом A . С другой стороны, при всяком c имеем

$$[BC] < [PQ];$$

это утверждение вытекает из теоремы 75 (п. 3), если фигуру $BCQP$ рассматривать как „половину“ некоторого равнобедренного двупрямоугольника. Итак

$$a < A,$$

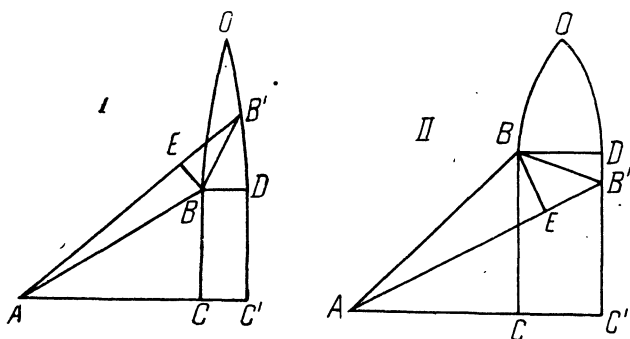
откуда и вытекает бесконечная малость $\mu(A, c)$. Для доказательства другого утверждения теоремы достаточно вспомнить теорему 139.

142. При всех значениях A и c , удовлетворяющих неравенствам:

$$0 < A, \quad c < \frac{\pi}{2},$$

функция $\mu(A, c)$ непрерывна.

Возьмем попережнему треугольник ABC и дадим нашим переменным независимым бесконечно малые приращения ΔA и Δc . Новый треугольник, соответствующий измененным значениям этих элементов строим следующим образом. Прежде всего строим угол, измеряемый числом $(A + \Delta A)$, и при том так, чтобы одной его стороной служила пр. AC , а сам он содержался в $\angle BAC$, или содержал этот угол в качестве своей части (черт. 30, который собственно состоит из двух чертежей I и II, даю-



Черт. 30.

щих примеры различного расположения элементов). На другой стороне построенного таким образом угла откладываем отрезок $[AB'] = c + \Delta c$ и при том так чтобы в треугольнике ABB' , определенном по $[AB]$ и $[AB']$, угол при вершине A был равен $|\Delta A|$. Изложенным путем приходим к треугольнику $AB'C'$, где катет

$$[B'C'] = a + \Delta a$$

есть приращенное значение функции $\mu(A, c)$.

Далее откладываем отрезок $[AE] = [AB] = c$ и при том так, чтобы один из отрезков $[AE]$ и $[AB']$ содержался в другом; тогда, если под символом $[B'E]$ понимать часть большего из них, то

$$[B'E] = |\Delta c|.$$

Переходя от треугольника ABB к треугольнику ABE , по теореме 32, получим:

$$\angle EAB = |\Delta A|;$$

проведя в равнобедренном треугольнике ABE высоту и применив теорему 141, убедимся в том, что его сторона $[BE]$ будет бесконечно малой.

Если теперь определить треугольник BEB' по $[BE]$ и $[B'E]$, то и третья сторона его $[BB']$ будет бесконечно малой [62].

Наконец, от т. C' откладываем отрезок

$$[C'D] = [CB] = a$$

и при том так, чтобы один из отрезков $[C'D]$ и $[C'B']$ был частью другого; тогда, понимая под $[B'D]$ часть большего из них, имеем

$$[B'D] = |\Delta a|.$$

Обозначим через O полюс прямой AC , в котором пересекаются перпендикуляры CB и $C'B'$; затем определим треугольник OBD по тому углу O , который содержит отрезок $[BB']$ и по тому отрезку $[OD]$, который содержит $[B'D] = |\Delta a|$; легко видеть, что при расположении I

(черт. 30) этот отрезок $[OD] = \frac{\pi}{2} - a$, а при расположении

II будет $[OD] = \frac{\pi}{2} + a$. Возникает вопрос о величине стороны $[OB]$; нетрудно сообразить, что для нее возможны лишь два значения:

$$\frac{\pi}{2} \mp a.$$

Для того чтобы разобраться в них, перейдем от треугольника OBD к треугольнику OBB' по теореме 31 и в случае I напомним:

$$[OB] < [OB'] + [BB'],$$

или

$$[OB] < \frac{\pi}{2},$$

так как $[OB'] < \frac{\pi}{2}$ и $[BB']$ бесконечно мало; следовательно,

$$[OB] = \frac{\pi}{2} - a = [OD].$$

При расположении II прибегаем к другому известному свойству треугольника

$$[OB] > [OB'] - [BB'],$$

или

$$[OB] > \frac{\pi}{2},$$

так как здесь $[OB'] > \frac{\pi}{2}$ и $[BB']$ — бесконечно мало; следовательно,

$$[OB] = \frac{\pi}{2} + a = [OD].$$

Итак, треугольник OBD всегда равнобедренный, откуда

$$\angle OBD = \angle ODB.$$

Перейдем от этого треугольника по теореме 31 к треугольнику $BB'D$; получим:

$$\angle B'BD < \angle OBD,$$

а потому

$$[B'D] < [BB']$$

по известному свойству треугольника. Отсюда уже ясно, что $|\Delta a|$ — бесконечно мало, а это и доказывает непрерывность функции $\mu(A, c)$.

Введем теперь вторую вспомогательную функцию:

Определение 41.

$$\varphi(A, c) = \frac{\mu(A, c)}{c}.$$

Другими словами, функция $\varphi(A, c)$ есть отношение катета к гипотенузе

$$\frac{a}{c}.$$

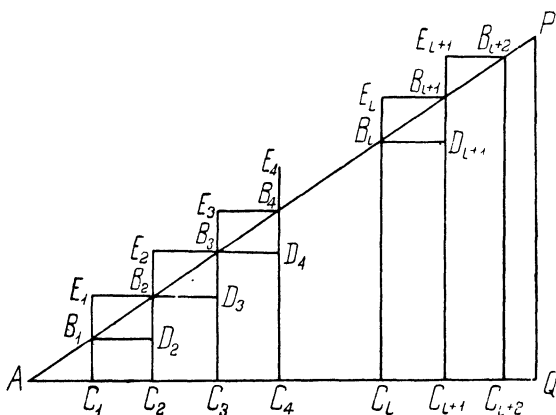
Из этого определения и из предыдущих теорем вытекают следующие свойства новой функции.

Для значений переменных:

$$0 < A, \quad c < \frac{\pi}{2}$$

функция $\varphi(A, c)$ однозначна, непрерывна (142), удовлетворяет неравенствам

$$0 < \varphi(A, c) < 1$$



Черт. 31.

и при $A = \text{const}$ и $c = \frac{\pi}{2^k}$, возрастая, стремится к пределу, равному $\lambda(A)$.

Определение функции $\varphi(A, c)$ мы сейчас же дополним условием

Определение 41 а.

$$\varphi(A, 0) = \lambda(A).$$

143. Для значений $c = \frac{m\pi}{2^k}$, где m и k — целые положительные числа ($m < 2^{k-1}$) и при $A = \text{const}$, $\varphi(A, c)$ есть убывающая функция.

Выбрав произвольно целое положительное число k , полагаем

$$\frac{\pi}{2^k} = \omega;$$

от треугольника ABC по теореме 32 переходим к треугольнику APQ (черт. 31), где $[AP] = [AQ] = \text{ппр.}$; на стороне $[AP]$, содержащей гипотенузу $[AB]$, откладываем ряд равных отрезков:

$$[AB_1] = [B_1B_2] = [B_2B_3] = \dots = [B_iB_{i+1}] = \dots = \omega,$$

и при том так, чтобы отрезки с концом в B_i принадлежали различным ппр., и чтобы отрезок $[AB_i]$, представляющий сумму отрезков

$$[AB_1], [B_1B_2], \dots [B_{i-1}B_i],$$

был меньше ппр. (B_0 обозначает ту же точку, что и A). Из точек B_i опускаем перпендикуляры на AC , и пусть их основаниями служат точки C_i ; эти точки лежат внутри стороны AQ (постулат Паша; перпендикуляры C_iB_i и QP не могут пересекаться внутри $[QP]$, так как угол $A < \frac{\pi}{2}$), а потому отрезки

$$[AC_1], [C_1C_2], [C_2C_3], \dots [C_iC_{i+1}]$$

определяем как части полупрямой $[AQ]$. Пользуясь теоремой 32, определяем треугольники

$$AB_1C_1, AB_2C_2, AB_3C_3, \dots AB_iC_i, \dots$$

прямоугольные при точках C_i . Легко видеть, что катеты

$$[B_1C_1], [B_2C_2], [B_3C_3], \dots [B_iC_i], \dots$$

будут различными значениями функции $\mu(A, c)$ при

$$A = \text{const и } c = i\omega$$

(i здесь целое положительное число $< 2^{k-1}$). Далее из т. B_i опускаем перпендикуляры B_iD_{i+1} на прямые $B_{i+1}C_{i+1}$ (D_1 обозначает ту же точку, что и C_1); точки D_{i+1} принадлежат катетам $[B_{i+1}C_{i+1}]$ (доказывается, как выше, из $\triangle AB_{i+1}C_{i+1}$). Точки Γ_i строим так, чтобы отрезки

$[B_i E_i]$ и $[B_i D_i]$, понимая под последним часть катета $[B_i C_i]$, были равны и принадлежали различным полупрямым из т. B_i . Определяем треугольники $B_i B_{i+1} D_{i+1}$ по $[B_i B_{i+1}]$ и $[B_{i+1} D_{i+1}]$, а треугольники $B_i B_{i+1} E_i$ по $[B_i B_{i+1}]$ и $[B_i E_i]$; тогда у треугольников

$$B_i B_{i+1} D_{i+1} \text{ и } B_{i+1} B_{i+2} E_{i+1}$$

угол при вершине B_{i+1} — один и тот же (двукратное применение теоремы 33), так что эти треугольники равны между собой, откуда

$$[B_i D_{i+1}] = [E_{i+1} B_{i+2}] \text{ и } \angle E_{i+1} \text{ — прямой.}$$

Точно также имеем

$$[B_{i-1} D_i] = [E_i B_{i+1}], \text{ и т. д.};$$

эти равные отрезки будут $<$ ппр. (доказывается при помощи теоремы 55).

Возьмем 4-угольник $C_i C_{i+1} B_{i+1} E_i$ с тремя прямыми углами, причем $[C_i C_{i+1}]$ есть упомянутый выше отрезок; из теоремы 75 (п. 3) нетрудно вывести, что стороны его, заключающие тупой угол, соответственно меньше противоположных сторон, так что

$$[E_i B_{i+1}] < [C_i C_{i+1}],$$

причем понятно, что $[E_i B_{i+1}]$ есть как раз тот отрезок, о котором говорилось выше.

После изложенной подготовки можно приступить к выводу основного неравенства. Имеем

$$[E_1 B_2] < [C_1 C_2] \text{ и } [E_1 B_2] = [AC_1],$$

так что

$$[AC_1] < [C_1 C_2]$$

$$2[AC_1] < [AC_2]$$

или, наконец:

$$[AC_1] < \frac{[AC_2]}{2}. \quad (I_1)$$

Далее

$$[B_2 C_2] < [C_1 E_1]$$

(так же, как и выше, из теоремы 75 (п. 3), под $[C_1E_1]$ понимаем сумму отрезков $[C_1B_1]$ и $[B_1E_1]$) или

$$[B_2C_2] < 2[B_1C_1],$$

откуда

$$[B_1C_1] > \frac{[B_2C_2]}{2}. \quad (\Pi_1)$$

Выведенные только-что формулы применим к углу AB_2C_2 ; формула (Π_1) дает

$$[B_1D_2] > \frac{[AC_2]}{2}.$$

Но

$$[B_1D_2] = [E_2B_3], \text{ а } [E_2B_3] < [C_2C_3],$$

так что

$$[C_2C_3] > \frac{[AC_2]}{2}.$$

Прибавляя к обеим частям неравенства по $[AC_2]$, приходим к новому

$$[AC_3] > \frac{3}{2}[AC_2],$$

или

$$\frac{[AC_3]}{3} > \frac{[AC_2]}{2};$$

наконец, присоединяем сюда неравенство (I_1) и приходим к расширенному неравенству:

$$[AC_1] < \frac{[AC_2]}{2} < \frac{[AC_3]}{3}. \quad (I_2)$$

Применяя же формулу (I_1) к углу AB_2C_2 , имеем

$$[B_2D_2] < \frac{[B_2C_2]}{2},$$

или

$$[B_2E_2] < \frac{[B_2C_2]}{2}.$$

Прибавим к обеим частям по $[B_2C_2]$:

$$[C_2E_2] < \frac{3}{2} \cdot [B_2C_2];$$

но, подобно предыдущему, существует неравенство

$$[B_3C_3] < [C_2E_2],$$

так что

$$\frac{[B_3C_3]}{3} < \frac{[B_2C_2]}{2},$$

отсюда, в связи с неравенством (II_1) получаем:

$$[B_1C_1] > \frac{[B_2C_2]}{2} > \frac{[B_3C_3]}{3}, \text{ и т. д.} \quad (II_2)$$

Продолжая подобные рассуждения, путем математической индукции дойдем до общего неравенства типа (II) :

$$\begin{aligned} [B_1C_1] &> \frac{[B_2C_2]}{2} > \frac{[B_3C_3]}{3} > \dots > \frac{[B_iC_i]}{i} > \\ &> \frac{[B_{i+1}C_{i+1}]}{i+1} > \dots \end{aligned}$$

(ряд можно продолжать, пока $i\omega < \frac{\pi}{2}$).

Возьмем теперь два числа m_1 и m_2 , удовлетворяющие указанным в теореме условиям, и пусть

$$m_1 > m_2;$$

тогда

$$\frac{[B_{m_2}C_{m_2}]}{m_2} > \frac{[B_{m_1}C_{m_1}]}{m_1}.$$

Умножая знаменателей на ω и вспоминая, что $i\omega = [AB_i]$, находим:

$$\frac{[B_{m_2}C_{m_2}]}{[AB_{m_2}]} > \frac{[B_{m_1}C_{m_1}]}{[AB_{m_1}]},$$

т. е.

$$\varphi(A, m_2\omega) > \varphi(A, m_1\omega),$$

где $\omega = \frac{\pi}{2^k}$.

Если теперь нам даны два значения переменной c :

$$c_1 = \frac{m_1 \pi}{2^{k_1}} \text{ и } c_2 = \frac{m_2 \pi}{2^{k_2}},$$

причем $c_1 > c_2$, то приводим эти дроби к одному знаменателю и по предыдущему случаю имеем:

$$\varphi(A, c_2) > \varphi(A, c_1) \text{ ч. и т. д.}$$

144. Если $c_1 > c_2$, то $\varphi(A, c_1) < \varphi(A, c_2)$ (значения $c_2 = 0$, и $c_1 = \frac{\pi}{2}$ здесь исключаются; о первом из них см. следующую теорему).

Действительно, выбрав целое положительное число k достаточно большим, можно в промежутке от c_2 до c_1 получить любое число значений вида

$$\frac{m \pi}{2^k};$$

принимая во внимание, что $\varphi(A, c)$ при данном A и при значениях c указанного вида есть функция убывающая (143), без труда убеждаемся в существовании такого значения c_0 , что

$$c_0 = \frac{m_0 \pi}{2^{k_0}}; \quad c_1 > c_0 > c_2$$

$\varphi(A, c_0)$ не равно ни $\varphi(A, c_1)$, ни $\varphi(A, c_2)$.

Если значения c_1 или c_2 тоже будут указанного особого вида, то неравенства, вывод которых служит ближайшей целью рассуждения, получаются непосредственно; поэтому допустим, что ни c_1 , ни c_2 не имеют вида $\frac{m \pi}{2^k}$.

Выбрав целое положительное число k , найдем целые положительные числа m_1 и m_2 так, чтобы

$$\frac{(m_1 - 1) \pi}{2^k} < c_1 < \frac{m_1 \pi}{2^k}$$

$$\frac{m_2 \pi}{2^k} < c_2 < \frac{(m_2 + 1) \pi}{2^k};$$

на основании теоремы 143 имеем неравенства

$$\varphi\left(A, \frac{m_1 \pi}{2^k}\right) < \varphi(A, c_0)$$

$$\varphi\left(A, \frac{m_2 \pi}{2^k}\right) > \varphi(A, c_0).$$

Если будем беспрестанно увеличивать k , то

$$\lim \left[\frac{m_1 \pi}{2^k} \right] = c_1; \quad \lim \left[\frac{m_2 \pi}{2^k} \right] = c_2,$$

и непрерывность рассматриваемой функции (142, опр. 41) дает:

$$\varphi(A, c_1) < \varphi(A, c_0)$$

$$\varphi(A, c_2) > \varphi(A, c_0)$$

(равенства не может быть в силу сделанных выше условий); отсюда выводим:

$$\varphi(A, c_1) < \varphi(A, c_2),$$

ч. и т. д.

145. Если $A = \text{const}$, то

$$\lim_{c \rightarrow 0} [\varphi(A, c)] = \lambda(A).$$

Если c — величина бесконечно малая, то из совокупности ее значений можно выделить ряд постоянно и беспрестанно убывающих (положительных) значений; их мы будем обозначать с помощью буквы γ . Функция $\varphi(A, \gamma)$ будет для таких значений γ постоянно возрастать (144), оставаясь по основному свойству своему все время < 1 ; следовательно, она стремится к определенному пределу, и пусть:

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} [\varphi(A, \gamma)] = t.$$

С целью избавиться от введенных ограничений для переменной c , установим прежде всего, что никакое значение $\varphi(A, c)$ не может быть больше или равно этому t . Пусть, в противность утверждению, существует такое значение c_0 , что

$$\varphi(A, c_0) \geq t;$$

тогда найдется такое значение γ_0 , что

$$\gamma_0 < c_0,$$

а потому

$$\varphi(A, \gamma_0) > \varphi(A, c_0), \quad (144)$$

откуда

$$\varphi(A, \gamma_0) > t,$$

что невозможно.

Итак, всегда имеем:

$$\varphi(A, c) < t.$$

Пусть теперь нам дано произвольное $\varepsilon > 0$; найдем такое γ_1 , что

$$t - \varphi(A, \gamma_1) < \varepsilon;$$

так как c — бесконечно малое, то, начиная с известного значения, будет выполняться неравенство

$$c < \gamma_1,$$

а потому

$$\varphi(A, c) > \varphi(A, \gamma_1).$$

Сопоставляя полученные неравенства, имеем

$$\varphi(A, \gamma_1) < \varphi(A, c) < t,$$

откуда

$$t - \varphi(A, c) < \varepsilon.$$

Все это доказывает, что

$$\lim_{c \rightarrow 0} [\varphi(A, c)] = t,$$

независимо от того закона, по которому c стремится к нулю, оставаясь положительным; но выше мы видели, что этот предел $= \lambda(A)$, если c стремится к нулю по особому закону (140, опр. 41); откуда и следует теорема.

Здесь мы достигли важного этапа в настоящем исследовании: именно мы доказали, что если в треугольнике ABC , при данном угле A , гипотенуза c стремится к нулю, то

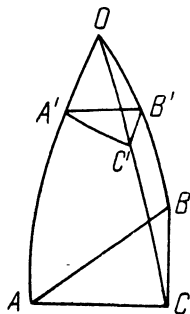
$$\lim \left[\frac{a}{c} \right] = \lambda(A).$$

Это предложение позволит сейчас же сделать дальнейший шаг.

146. Если в треугольнике ABC , где угол $C = \frac{\pi}{2}$, углы A и B — острые, то

$$\lambda(a) = \lambda(c) \cdot \lambda(A).$$

Прежде всего отметим, что по теореме 55 катеты данного треугольника будут $<$ ппр. Построим трегранный угол, соотнесенный данному треугольнику, т. е. поступаем следующим образом: полюс O плоскости ABC соединяем с вершинами треугольника ABC (черт. 32) и остановимся на том трегранном угле $OABC$, для которого данный треугольник служит сечением. Нетрудно заключить, что стороны треугольника будут отрезками, соотнесенными плоским углом трегранного, а углы треугольника будут линейными углами его двугранных углов, так что



Черт. 32.

$$\angle BOC = a, \angle AOB = c, \text{ двугр. } \angle OC = \frac{\pi}{2}, \text{ и т. д.}$$

Выберем далее определенную ппр. $[OB]$ (что вместе с треугольником ABC вполне определяет тетраэдр $OABC$) и внутри нее отмечаем точку B' ; из этой точки опускаем перпендикуляры $B'C'$ и $B'A'$ соответственно на прямые OC и OA ; их основания принадлежат ребрам тетраэдра (постулат Паша; a и $b <$ ппр.).

Теперь имеем следующие соотношения:

$$\text{пл. } OCB \perp \text{пл. } OCA$$

$$B'C' \perp OC \dots \text{линии пересечения,}$$

откуда

$$B'C' \perp OCA,$$

следовательно,

$$B'C' \perp C'A' \text{ и } \angle B'C'A' = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, треугольник $A'B'C'$, внутренний для трехгранного угла, будет прямоугольным при C' ; два других угла его не могут быть прямыми, так как иначе $[A'B']$ неизбежно было бы = пр., а из 4-угольника $ABB'A'$ с тремя прямыми углами видно, что $[A'B'] < [AB]$, который $<$ пр. (56). Далее, имеем

$$OA \perp A'B' \text{ (по построению)}$$

$OA \perp A'C'$ (по „теореме о трех перпендикулярах“), так что угол $C'A'B'$ будет линейным для двугранного угла при OA , т. е.

$$\angle C'A'B' = A.$$

Пусть теперь отрезок $[OB']$, часть полупрямой $[OB]$, делается бесконечно малым; тогда

$$\lim \frac{[B'C']}{[OB']} = \lambda [\angle BOC] = \lambda (a) \text{ (145, опр. 41);}$$

точно также

$$\lim \frac{[B'A']}{[OB']} = \lambda [\angle AOB] = \lambda (c)$$

(надо прибавить, что треугольники $OB'C'$ и $OB'A'$ получаются из соответственных граней тетраэдра по теореме 32); деление отсюда дает

$$\lim \frac{[B'C']}{[B'A']} = \frac{\lambda (a)}{\lambda (c)}.$$

С другой стороны, в треугольнике $A'B'C'$ стороны бесконечно малы, а угол $B'A'C' = A = \text{const.}$, так что (145),

$$\lim \frac{[B'C']}{[B'A']} = \lambda (A)$$

и сравнение обоих значений дает искомое. Следует добавить, что изменение положения треугольника $A'B'C'$ в данном случае существенного значения не имеет, ибо дело идет лишь о количественном соотношении, и можно

даже строить при одном и том же угле, равном A , различные треугольники, равные треугольнику $A'B'C'$ в его различных положениях.

147. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = \frac{\pi}{2}$) с острыми углами A и B , имеем соотношения:

$$\lambda(a) = \lambda(c) \cdot \lambda(A) \quad (I)$$

$$\lambda(b) = \lambda(c) \cdot \lambda(B) \quad (II)$$

$$\lambda\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = \lambda\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \lambda\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \quad (III)$$

$$\lambda\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \lambda\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cdot \lambda(B) \quad (IV)$$

$$\lambda\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \lambda\left(\frac{\pi}{2} - b\right) \cdot \lambda(A). \quad (V)$$

Для доказательства применяем теорему 146 к замкнутой цепи соотнесенных прямоугольных треугольников (см. теорему 67).

Последние соотношения снова обращают наше внимание на функцию $\lambda(x)$; последняя была определена в промежутке

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

и в указанном промежутке она возрастает от 0 до 1.

Ближайшие предложения необходимы для вывода функционального уравнения, решающего вопрос об определении $\lambda(x)$.

[148.] При данном A в треугольнике ABC имеем

$$\frac{a}{Ac} < \frac{4}{\pi}.$$

На основании теорем 144 и 145 заключаем:

$$\varphi(A, c) \left(\text{или } \frac{a}{c} \right) \text{ всегда } < \lambda(A);$$

но

$$\lambda(A) < \frac{4A}{\pi} \quad (138),$$

так что

$$\frac{a}{c} < \frac{4A}{\pi},$$

ч. и т. д.

[149]. При бесконечно малом A в треугольнике ABC имеем

$$\lim \left(\frac{a}{c} \right) = 0.$$

Пусть нам задано произвольное $\varepsilon > 0$; подберем значение угла A так, чтобы

$$A < \frac{\pi\varepsilon}{4};$$

тогда, на основании теоремы 148, имеем:

$$\frac{a}{c} < \varepsilon,$$

причем это неравенство не нарушится и при меньших значениях указанного угла; отсюда и вытекает требуемое утверждение.

Добавим, что гипотенуза c может иметь произвольную величину в границах от 0 до $\frac{\pi}{2}$; если она не бесконечно мала, то предложение очевидно.

Только-что доказанное можно выразить и так

$$\lim_{A \rightarrow 0} [\varphi(A, c)] = 0;$$

ейчас мы рассмотрим более общий случай.

150. Если угол A стремится к пределу, равному A_0 , а гипотенуза c бесконечно мала, то предел функции $\varphi(A, c)$ равен $\lambda(A_0)$.

Для дальнейшего важен случай, когда угол A стремится к своему пределу A_0 , оставаясь больше него; на этом предположении мы и остановимся, полагая

$$A = A_0 + \alpha,$$

где α — положительная бесконечно малая. Рассмотрим разность

$$\varphi(A_0 + \alpha, c) - \varphi(A_0, c),$$

основываясь на определении функции $\varphi(A, c)$ как отношении катета к гипотенузе. Берем треугольник ABC (черт. 33), в котором

$$\angle BAC = A_0 \text{ и гипот. } [Ab] = c;$$

строим угол $B'AB = \alpha$ и при том так, чтобы углы α и A_0 принадлежали различным прямым углам с общей стороной AB ; тогда угол $B'AC$, содержащий прямую AB , равен сумме $(A_0 + \alpha)$. Далее на прямой AB' откладываем отрезок $[AB'] = c$ и притом так, чтобы угол $B'AB$ в треугольнике $B'AB$, определенном по отрезкам $[AB] = [AB'] = c$, был равен α ; в этом равнобедренном треугольнике $B'AB$ проводим высоту AE , которая будет и равноделящей угла α ; под символом $[BB']$ в дальнейшем понимаем основание указанного треугольника. Наконец, из т. B' опускаем на прямую AC перпендикуляр $B'C'$ и определяем треугольник $AB'C'$ по углу $B'AC' = A_0 + \alpha$ и по отрезку $[AB']$.

В треугольниках ABC и $AB'C'$ катеты $[BC]$ и $[B'C']$ можно рассматривать как половины хорд, вписанных в окружность $A(c)$; поэтому, в силу известной теоремы, имеем

$$[B'C'] > [BC].$$

Следовательно, на $[B'C']$ от точки C' можно отложить, как его часть, отрезок $[C'D] = [CB]$; другую часть катета $[B'C']$ составит отрезок $[B'D]$.

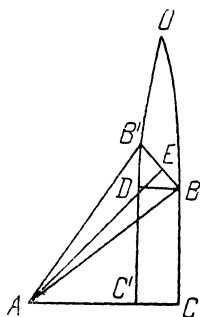
Теперь интересующую нас разность двух значений функции $\varphi(A, c)$ можно представить так:

$$\varphi(A_0 + \alpha, c) - \varphi(A_0, c) = \frac{[B'C']}{[AB']} - \frac{[BC]}{[AB]} = \frac{[B'D]}{[AB]};$$

дело сводится, таким образом, к рассмотрению последнего отношения.

Перейдем от треугольника $B'AB$ по теореме 31 к треугольнику ABE ; применяя к этому треугольнику теорему 141, убеждаемся в бесконечной малости стороны $[BE]$, а потому и $[BB'] = 2[BE]$ будет бесконечно малой.

Далее отметим полюс O прямой AC ; в этой точке



Черт. 33.

пересекаются перпендикуляры BC и $B'C'$. Определим треугольник OBD по тому углу O , который содержит $[BB']$, и по тому отрезку $[^{\circ}D]$, который содержит $[B'D]$; легко видеть, что

$$[OD] = \frac{\pi}{2} - [BC].$$

Что касается стороны $[OB]$, то для нее возможны лишь два значения

$$\frac{\pi}{2} \mp [BC];$$

чтобы разобраться в этом вопросе, перейдем от треугольника OBD , по теореме 31, к треугольникам OBV' и DBV' ; по известному свойству, в первом из них имеем

$$[OB] < [OB'] + [BB']$$

или

$$[OB] < \frac{\pi}{2} - [B'C'] + [BB'],$$

а так как $[BB']$ бесконечно мало, то должно быть

$$[OB] = \frac{\pi}{2} - [BC],$$

и треугольник OBD будет равнобедренным, так что

$$\angle ODB = \angle OBD.$$

Тогда в треугольнике DBV' будет

$$\angle B'BD < \angle B'DB,$$

а это влечет за собой новое неравенство:

$$[B'D] < [B'B].$$

Теперь у нас имеется все необходимое для исследования указанной выше разности; преобразуем ее

$$\varphi(A_0 + \alpha, c) - \varphi(A_0, c) = \frac{[B'D]}{[B'B]} \cdot \frac{[B'B]}{[AB]} < \frac{[B'B]}{[AB]},$$

так как

$$\frac{[B'D]}{[B'B]} < 1.$$

Далее можно написать и так:

$$\varphi(A_0 + \alpha, c) - \varphi(A_0, c) < 2 \cdot \frac{[BE]}{[AB]}.$$

В силу теоремы 149, последнее отношение будет бесконечно малым при бесконечно малом α (значения c безразличны); следовательно, разбираемая разность будет бесконечно малой при бесконечно малых α и c . Но $\varphi(A_0, c)$ при данных условиях стремится к пределу, равному $\lambda(A_0)$ (145), а потому и $\varphi(A_0 + \alpha, c)$ при бесконечно малых α и c стремится к тому же самому пределу, ч. и т. д.

Полученное предложение можно высказать несколько иначе, а именно: если в прямоугольном треугольнике ABC стороны бесконечно малы, а угол A стремится к пределу $= A_0$, оставаясь $> A_0$, то

$$\lim \left[\frac{\alpha}{c} \right] = \lambda(A_0).$$

Приступая к выводу функционального уравнения, введем для сокращения письма еще одну новую функцию:

Определение 42.

$$\nu(x) = \lambda\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

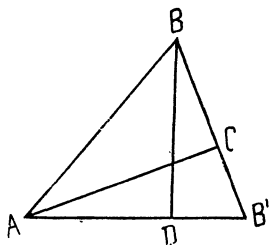
Легко видеть, что в промежутке

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

функция $\nu(x)$ однозначна и убывает от 1 до 0.

151. Функции $\lambda(x)$ и $\nu(r)$ связаны зависимостью

$$\lambda(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda(\alpha_1) \cdot \nu(\alpha_2) + \lambda(\alpha_2) \cdot \nu(\alpha_1),$$



Черт. 34.

где

$$\alpha_1 \text{ и } \alpha_2 > 0, \text{ а } \alpha_1 + \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}.$$

Действительно, берем угол $BAC = \alpha_2$ и угол $B'AC = \alpha_1$ и при том так, чтобы они принадлежали различным прямым углам [точки B и B' берем на перпендикуляре к прямой AC в точке C (черт. 34)]; тогда угол BAB' , содержащий прямую AC , будет $= \alpha_1 + \alpha_2$. Выбрав отрезок $[AC] < \text{ппр.}$, определяем треугольник ABC по $[AC]$ и углу $BAC = \alpha_2$, а треугольник $A'BC$ — по $[AC]$ и углу $B'AC = \alpha_1$; от них переходим к треугольнику ABB' путем, обратным по отношению к описанному в теореме 31. В этом треугольнике опускаем высоту $[BD]$, причем точка D либо совпадает с A (если $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$), либо упадет внутри стороны $[AB']$ [$\alpha_1 + \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$ и угол B' тоже $< \frac{\pi}{2}$ в силу теоремы 55]; наконец, треугольники ABD , если таковой вообще существует, и $BB'D$ определяем с помощью теоремы 31.

В дальнейшем углы α_1, α_2 , прямые AB, AC, AB' остаются неизменными, отрезок же $[AC]$ становится бесконечно малым; тогда, на основании теоремы 73, все стороны треугольников ABC и $AB'C$ будут бесконечно малыми; к тому же самому заключению придем и относительно сторон треугольников ABD и $BB'D$.

Теорема 145 здесь дает

$$\lim \frac{[BC]}{[AB]} = \lambda(\alpha_2)$$

$$\lim \frac{[B'C]}{[AB']} = \lambda(\alpha_1).$$

Далее имеем:

$$\lim [\angle B] = \frac{\pi}{2} - \alpha_2 \quad (71),$$

и при том (по свойству суммы углов треугольника):

$$\angle B > \frac{\pi}{2} - \alpha_2;$$

при таких условиях можно применить теорему 150 и написать:

$$\lim \frac{[AC]}{[AB]} = \lambda \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2 \right) = \nu(\alpha_2) \text{ (опр. 42),}$$

и совершенно подобным же образом

$$\lim \frac{[AC]}{[AB']} = \lambda \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right) = \nu(\alpha_1).$$

Опять-таки, на основании 145, пишем:

$$\lim \frac{[BD]}{[AB]} = \lambda(\alpha_1 + \alpha_2),$$

что будет верным и при $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$; наконец, из треугольника $AB'C$ видно, что

$$\lim (\angle B') = \frac{\pi}{2} - \alpha_1 \quad (71),$$

и теорема 150 в треугольнике $BB'D$ дает

$$\lim \frac{[BD]}{[BB']} = \lambda \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1 \right) = \nu(\alpha_1).$$

Два последних равенства приводят к новому

$$\lim \frac{[BB']}{[AB]} = \frac{\lambda(\alpha_1 + \alpha_2)}{\nu(\alpha_1)}.$$

Но

$$\begin{aligned} \lim \frac{[BB']}{[AB]} &= \lim \frac{[BC]}{[AB]} + \lim \frac{[B'C]}{[AB]} = \\ &= \lambda(\alpha_2) + \lim \frac{[B'C]}{[AB']} \cdot \lim \frac{[AB']}{[AC]} \cdot \lim \frac{[AC]}{[AB]} = \\ &= \lambda(\alpha_2) + \lambda(\alpha_1) \cdot \frac{1}{\nu(\alpha_1)} \cdot \nu(\alpha_2). \end{aligned}$$

Подставляя и освобождаясь от знаменателей, находим:

$$\lambda(\alpha_1 + \alpha_2) = \nu(\alpha_1) \cdot \lambda(\alpha_2) + \lambda(\alpha_1) \cdot \nu(\alpha_2),$$

[152]. Кроме уравнения теоремы 151, между функциями $\lambda(x)$ и $\nu(x)$ имеют место еще следующие зависимости:

$$\lambda^2(\alpha) + \nu^2(\alpha) = 1$$

$$\lambda(2\alpha) = 2\lambda(\alpha) \cdot \nu(\alpha)$$

$$\nu(\alpha_1 + \alpha_2) = \nu(\alpha_1)\nu(\alpha_2) - \lambda(\alpha_1)\lambda(\alpha_2)$$

$$\nu(2\alpha) = 2\nu^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\lambda^2(\alpha)$$

$$\lambda(\alpha) = + \sqrt{\frac{1 - \nu(2\alpha)}{2}}$$

$$\nu(\alpha) = + \sqrt{\frac{1 + \nu(2\alpha)}{2}}.$$

В самом деле, полагая в формуле теоремы 151

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2},$$

получаем

$$1 = \lambda(\alpha_1)\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right) + \lambda\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right)\nu(\alpha_1),$$

или

$$\lambda^2(\alpha_1) + \nu^2(\alpha_1) = 1,$$

так что первая формула настоящей теоремы уже доказана; для получения второй достаточно в формуле теоремы 151 положить

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha.$$

Далее производим следующие выкладки:

$$1 - \nu^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \lambda^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \{1 - \nu^2(\alpha_1)\} \nu^2(\alpha_2) + \\ + \lambda^2(\alpha_2) \{1 - \lambda^2(\alpha_1)\} + 2\lambda(\alpha_1)\lambda(\alpha_2)\nu(\alpha_1)\nu(\alpha_2);$$

$$\nu^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \nu^2(\alpha_1)\nu^2(\alpha_2) + \lambda^2(\alpha_1)\lambda^2(\alpha_2) - 2\lambda(\alpha_1)\lambda(\alpha_2)\nu(\alpha_1)\nu(\alpha_2); \\ \nu(\alpha_1 + \alpha_2) = \pm \{\nu(\alpha_1)\nu(\alpha_2) - \lambda(\alpha_1)\lambda(\alpha_2)\}, \quad (*)$$

и дело сводится к определению знака. Надо вспомнить, что сейчас наши переменные независимы связаны неравенствами:

$$\alpha_1 \text{ и } \alpha_2 > 0, \text{ а } \alpha_1 + \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2} \text{ (см. 151);}$$

если $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, то легко убедиться, что обе части равенства (*) обращаются в 0; если же

$$\alpha_1 + \alpha_2 < \frac{\pi}{2},$$

то

$$\alpha_1 < \frac{\pi}{2} - \alpha_2 \text{ и } \alpha_2 < \frac{\pi}{2} - \alpha_1,$$

и возрастание функции $\lambda(x)$ дает неравенства

$$\lambda(\alpha_1) < \lambda\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right)$$

$$\lambda(\alpha_2) < \lambda\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_1\right),$$

откуда

$$\lambda(\alpha_1) \lambda(\alpha_2) < \nu(\alpha_2) \nu(\alpha_1),$$

т. е. внутри скобок равенства (*) стоит положительная величина, а так как и само $\nu(\alpha_1 + \alpha_2) > 0$, то перед скобками надо взять знак плюс. Таким образом получается третья формула; полагая в ней $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ и принимая во внимание первую формулу, получим четвертую; а пятая и шестая являются лишь иными формами четвертой (перед корнем надо брать плюс, ибо у нас $\lambda(\alpha)$ и $\nu(\alpha)$ непременно > 0).

Бросается в глаза, что эти формулы сложения, умножения и деления для функций $\lambda(x)$ и $\nu(x)$ имеют тот же самый вид, как соответствующие теоремы для синуса и косинуса. Указанное обстоятельство в связи с монотонностью функций $\lambda(x)$ и $\nu(x)$ позволит установить их тождество с тригонометрическими функциями.

[153]. При значениях $x = \frac{m\pi}{2^k}$, где m и k — целые положительные числа, причем $m \leq 2^{k-1}$, имеем:

$$\lambda(x) = \sin x, \quad \nu(x) = \cos x.$$

При $x = \frac{\pi}{2}$ это — очевидно (опр. 39 а и 42); далее, первая формула теоремы 152 дает

$$\lambda^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \nu^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$$

но в силу определения 42:

$$\nu\left(\frac{\pi}{4}\right) = \lambda\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

так что

$$2\lambda^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

откуда

$$\lambda\left(\frac{\pi}{4}\right) = \nu\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Итак, мы убедились, что

$$\lambda\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = \sin \frac{\pi}{2^2} \text{ и } \nu\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = \cos \frac{\pi}{2^2};$$

далее остается лишь обратить внимание на то, что формулы сложения

ния и деления аргумента пополам для функций $\lambda(x)$ и $\nu(x)$ одинаковы с соответствующими формулами для $\sin x$ и $\cos x$ (152), откуда и следует теорема.

154. При всяком x , удовлетворяющем условию:

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},$$

имеем

$$\lambda(x) = \sin x \text{ и } \nu(x) = \cos x.$$

Пусть нам задано какое-нибудь значение x , удовлетворяющее указанным неравенствам; выбрав целое положительное число k , подберем другое такое же число m так, чтобы выполнялось условие:

$$\frac{m\pi}{2^k} < x < \frac{(m+1)\pi}{2^k}$$

(в случае равенства дело сводится к теореме 153). В силу возрастания функции $\lambda(x)$ отсюда имеем:

$$\lambda\left(\frac{m\pi}{2^k}\right) < \lambda(x) < \lambda\left(\frac{(m+1)\pi}{2^k}\right),$$

или по теореме 153

$$\sin \frac{m\pi}{2^k} < \lambda(x) < \sin \frac{(m+1)\pi}{2^k}.$$

Увеличивая k до ∞ , в пределе получаем

$$\lim \left(\frac{m\pi}{2^k} \right) = \lim \left(\frac{(m+1)\pi}{2^k} \right) = x,$$

а непрерывность синуса показывает, что крайние части нашего неравенства имеют своим пределом $\sin x$, откуда и следует

$$\lambda(x) = \sin x.$$

Остается еще сослаться на определение 42.

155. В прямоугольном треугольнике ABC , где угол $C = \frac{\pi}{2}$, а углы A и B — острые, имеем следующие основные зависимости:

$$\sin a = \sin c \cdot \sin A \quad (I)$$

$$\sin b = \sin c \cdot \sin B \quad (II)$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b \quad (III)$$

$$\cos A = \cos a \cdot \sin B \quad (IV)$$

$$\cos B = \cos b \cdot \sin A \quad (V)$$

$$\cos c = \operatorname{ctg} A \cdot \operatorname{ctg} B \quad (VI)$$

$$\sin a = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg} B \quad (VII)$$

$$\sin b = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} A \quad (VIII)$$

$$\cos A = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg} c \quad (IX)$$

$$\cos B = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} c. \quad (X)$$

(число основных зависимостей равно числу сочетаний из пяти элементов a, b, c, A, B по три).

Первые пять формул непосредственно получаются из теорем 147 и 154. Далее, формула (VI) выводится из (III), (V), (IV); формула (VII) — из (II), (V), (I), а формула (VIII) получается из (VII) одновременным перемещением букв a и b , A и B ; формулу (IX) выводим из (II), (III), (IV) а формула (X) получается из (IX) так же, как (VIII) из (VII).

156. Указанные в теореме 155 десять основных зависимостей имеют место для всякого прямоугольного треугольника.

Действительно, рассмотрим различные случаи:

1) A и B — оба острые; ссылаемся на теорему 155.

2) A и B — оба тупые; тогда берем треугольник ABC , дополняющий данный до угла C , и, применяя к нему теорему 155, получаем искомые зависимости для данного треугольника.

3) Если один угол острый, а другой тупой, то применяем теорему 155 к треугольнику ABC , дополняющему данный до упомянутого острого угла.

Замечание 1. Случай, когда в треугольнике ABC имеются два прямых угла, особых трудностей не пред-

ставляет; так, если угол $B =$ углу $C = \frac{\pi}{2}$, то имеют место равенства:

$$b = c = \frac{\pi}{2} \text{ и } A = a.$$

Впрочем формулы 155 остаются верными и здесь; только правые части формул (VII) и (IX) принимают неопределенный вид $0 \cdot \infty$, и не представляет труда убедиться в том, что левые части являются их „истинными значениями“.

Замечание 2. Формулы римановой тригонометрии иногда пишут иначе, вводя вместо чисел a, b, c отношения:

$$\frac{a}{R}, \frac{b}{R}, \frac{c}{R},$$

где R — некоторая постоянная; то или другое обозначение связано с выбором единицы длины. Выше мы приняли за число, измеряющее отрезок, то число, которое измеряет угол, имеющий данный отрезок соотнесенным; другими словами, за единицу длины был принят отрезок, соотнесенный углу, служащему единицей измерения для углов. Но можно было бы с таким же успехом принять за единицу длины отрезок, соотнесенный углу, измеряемому числом R ; тогда числа, выражающие длины отрезков, пришлось бы разделить на R , и в частности в теореме 154 мы написали бы

$$\lambda\left(\frac{x}{R}\right) = \sin \frac{x}{R} \text{ и т. д.}$$

(Собственно и здесь, для упрощения письма, можно было бы положить:

$$\lambda\left(\frac{x}{R}\right) = \Delta(x).$$

157. Для любого треугольника имеем

$$1) \frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

(теорема синусов)

2) $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C$ (1-ая теорема косинусов) и две другие подобные формулы.

3) $\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$ (2-ая теорема косинусов) и две другие подобные формулы.

На тех случаях, когда в треугольнике имеется прямой угол, можно не останавливаться, так как они проверяются непосредственно. Переходя к другим случаям, отметим, что в эллиптической геометрии имеет место предложение: основание высоты треугольника лежит внутри противоположной стороны тогда и только тогда, когда углы, прилежащие к этой стороне, — оба острые или оба тупые.

Остановимся сначала на треугольнике, в котором все три угла острые, или все тупые, так что основания всех трех высот лежат внутри противоположных сторон. Опустив высоту $[AD]$, определим треугольники ABD и ACD по теореме 31 и введем обозначения:

$$[CD] = y, [BD] = a - y, [AD] = x.$$

На основании теорем 155 и 156 имеем:

$$\sin x = \sin c \sin B \quad \text{и} \quad \sin x = \sin b \sin C, \quad (I)$$

откуда

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin b}{\sin B},$$

что и доказывает теорему синусов. Далее:

из $\triangle ABD$:

$$\cos c = \cos x \cos (a - y) \quad (III)$$

$$\cos c = \cos x \cos y \cos a + \cos x \sin y \sin a;$$

из $\triangle ACD$:

$$\cos x \cos y = \cos b,$$

так что, подставляя, получаем:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \cos x \sin y.$$

Преобразуем далее:

$$\cos x \sin y = \sin y \frac{\cos b}{\cos y} = \sin b \frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} b};$$

из треугольника ACD по формуле (IX) находим:

$$\cos C = \operatorname{tg} y \operatorname{ctg} b,$$

так что

$$\cos x \sin y = \sin b \cos C;$$

подставляя, получаем окончательно:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

т. е. первую теорему косинусов.

Для доказательства 2-ой теоремы косинусов переходим к треугольнику, взаимно полярному с данным, и применяем к нему 1-ую теорему косинусов.

Если теперь в данном треугольнике два угла острые, а третий—тупой, то переходим к треугольнику, дополняющему данный до тупого угла; применяя к нему выведенные в предыдущем пункте зависимости, получаем искомое для данного треугольника.

Если, наконец, два угла тупые, а третий — острый, то точно так же переходим к треугольнику, дополняющему данный до острого угла, и т. д.

Изложенного уже достаточно, чтобы прийти к следующему заключению:

Прямолинейная тригонометрия эллиптической системы тождественна со сферической тригонометрией евклидова пространства.

Следовательно, мы в праве использовать здесь все формулы и правила обыкновенной сферической тригонометрии; напомним, например, читателю, что весьма удобно известное мнемоническое правило Непера для формул прямоугольного треугольника.

Позволим себе здесь же, не входя в дальнейшие подробности, указать, что сферическая тригонометрия римановой системы имеет тот же самый характер (равно как и в геометрии Лобачевского).

В заключение главы дадим тригонометрические зависимости между элементами 4-угольников с тремя или с двумя прямыми углами.

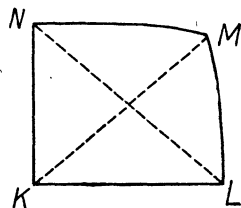
158. Между элементами 4-угольника с тремя прямыми углами, в котором M обозначает тупой угол, a_1 и b_1 — заключающие этот угол стороны, a и b — стороны, им противолежащие, имеют место следующие зависимости:

$$\begin{aligned}\sin b_1 &= \sin b \cos a_1; & \sin a_1 &= \sin a \cos b_1 \\ \operatorname{tg} a_1 &= \operatorname{tg} a \cos b; & \operatorname{tg} b_1 &= \operatorname{tg} b \cos a \\ \cos M &= -\sin a \sin b.\end{aligned}$$

Пусть нам дан 4-угольник $KLMN$ (черт. 35), в котором все углы, кроме угла M , прямые и

$$[KL] = a, \quad [KN] = b, \quad [LM] = b_1, \quad [MN] = a_1.$$

Введем еще в рассмотрение диагонали $[KM]$ и $[LN]$ и пусть они делят соответствующие прямые углы на следующие части:



$$\angle MKL = \alpha, \quad \angle MKN = \frac{\pi}{2} - \alpha;$$

$$\angle KNL = x, \quad \angle MNL = \frac{\pi}{2} - x;$$

Черт. 35.

$$\angle KLN = y, \quad \angle MLN = \frac{\pi}{2} - y.$$

Из треугольников KLM и KNM имеем (155, I):

$$\left. \begin{aligned}\sin b_1 &= \sin [KM] \sin \alpha \\ \sin a_1 &= \sin [KM] \cos \alpha\end{aligned} \right\} (*)$$

откуда

$$\frac{\sin b_1}{\sin a_1} = \operatorname{tg} \alpha;$$

далее из треугольника KNM :

$$\sin b = \operatorname{tg} a_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

и подставляя $\operatorname{tg} \alpha$, находим

$$\sin b_1 = \sin b \cdot \cos a_1.$$

Вторая формула для a_1 получается совершенно так же.

Затем из того же треугольника имеем (155, IX),

$$\sin \alpha = \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{ctg} [KM],$$

что в связи с формулой (*) дает

$$\sin b_1 = \operatorname{tg} b \cdot \cos [KM];$$

теперь можно вычислить $\operatorname{tg} b_1$, деля $\sin b_1$ на $\cos b_1$, выведенный из второй формулы настоящей теоремы:

$$\operatorname{tg} b_1 = \frac{\operatorname{tg} b \cos [KM] \cdot \sin a}{\sin a_1}.$$

Но (155, III),

$$\cos [KM] = \cos a \cdot \cos b_1,$$

так что

$$\operatorname{tg} b_1 = \frac{\operatorname{tg} b \cdot \cos a \cdot \cos b_1 \sin a}{\sin a_1};$$

подставляя $\sin a_1$ из группы I зависимостей, окончательно находим

$$\operatorname{tg} b_1 = \operatorname{tg} b \cdot \cos a,$$

и другая формула второй группы выводится совершенно так же.

Переходим к вычислению угла M ; из треугольника LMN по 2-ой теореме косинусов имеем:

$$\cos M = -\sin x \cdot \sin y + \cos x \cdot \cos y \cdot \cos [LN];$$

далее берем треугольник KNL (155, I):

$$\left. \begin{aligned} \sin a &= \sin [LN] \cdot \sin x \\ \sin b &= \sin [LN] \cdot \sin y \end{aligned} \right\}$$

откуда

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{\sin a \cdot \sin b}{\sin^2 [LN]}.$$

Кроме того, в том же треугольнике получаем зависимости (155, IV):

$$\left. \begin{aligned} \cos x &= \cos a \cdot \sin y \\ \cos y &= \cos b \cdot \sin x \end{aligned} \right\}$$

так что

$$\cos x \cdot \cos y = \cos a \cdot \cos b \cdot \frac{\sin a \cdot \sin b}{\sin^2 [LN]}.$$

Подставляем:

$$\cos M = \frac{\sin a \sin b}{\sin^2 [LN]} \cdot \{ -1 + \cos a \cdot \cos b \cdot \cos [LN] \},$$

но (155, III),

$$\cos (LN) = \cos a \cdot \cos b,$$

так что можно написать

$$\cos M = \frac{\sin a \sin b}{\sin^2 [LN]} \{ -1 + \cos^2 [LN] \},$$

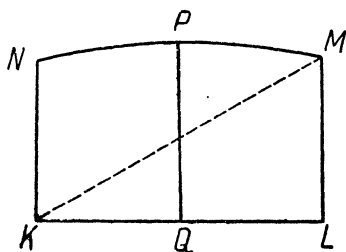
откуда

$$\cos M = -\sin a \cdot \sin b,$$

ч. и т. д.

159. В равнобедренном двупрямоугольнике, в котором a — основание, h — бок, a_1 — завершающая сторона и M — тупой угол, имеем следующие зависимости:

$$\cos a_1 = \sin^2 h + \cos^2 h \cdot \cos a$$



Черт. 36.

$$\cos M = -\frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a_1}{2}} \cdot \sin h.$$

Действительно, пусть дан 4-угольник $KLMN$ (черт. 36) с прямыми углами при K и L , причем

$$[KL] = a, \quad [KN] = [LM] = h, \quad [MN] = a_1.$$

По 1-ой теореме косинусов из треугольника KNM имеем:

$$\cos a_1 = \cos h \cdot \cos [KM] + \sin h \cdot \sin [KM] \cdot \cos MKN.$$

Но (155, III)

$$\cos [KM] = \cos a \cos h$$

$$\sin [KM] \cos \angle MKN = \sin [KM] \sin \angle MKL = \sin h \quad (155, I),$$

следовательно

$$\cos a_1 = \cos^2 h \cdot \cos a + \sin^2 h,$$

ч. и т. д.

Далее соединяем середины P и Q сторон $[MN]$ и $[KL]$; не представляет труда доказать, что PQ будет общим перпендикуляром прямых MN и KL . Переходя к 4-угольнику $QLMP$ с тремя прямыми углами и пользуясь теоремой 158, находим:

$$\cos M = -\sin \frac{a}{2} \cdot \sin [PQ]$$

$$\sin h = \sin [PQ] \cdot \cos \frac{a_1}{2};$$

исключая $[PQ]$, приходим к искомому равенству

$$\cos M = -\frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a_1}{2}} \cdot \sin h.$$

Вооруженные тригонометрическими зависимостями, мы можем приступить к решению некоторых геометрических вопросов. Вообще роль тригонометрии в римановой геометрии будет еще значительнее, чем в евклидовой: то обстоятельство, что в основные зависимости между элементами треугольника не только углы, но и стороны входят под знаками тригонометрических функций, заставляет ожидать, что то же самое повторится и в других вопросах геометрии. Ожидание это оправдывается, например, следующей теоремой:

160. Равноделящая угла A в треугольнике ABC пересекает сторону $[BC]$ в такой точке D , что

$$\frac{\sin [BD]}{\sin [CD]} = \frac{\sin [AB]}{\sin [AC]}.$$

В самом деле, из треугольников ABD и ACD , которые определяются по теореме 31, получаем (157 (I)):

$$\frac{\sin [BD]}{\sin [AB]} = \frac{\sin \frac{1}{2} A}{\sin D}$$

$$\frac{\sin [CD]}{\sin [AC]} = \frac{\sin \frac{1}{2} A}{\sin D},$$

приравнивая левые части, находим искомое.

Не входя в дальнейшие подробности, мы наметим некоторые предложения, стоящие отчасти в связи с предыдущей теоремой.

Пусть даны две точки A и B , и мы будем искать в некоторой плоскости, проходящей через AB , такие точки M , чтобы отношение $\frac{\sin [AM]}{\sin [BM]}$ имело постоянную величину; тогда геометрическое место точек M определяется тем свойством, что

$$\angle KML = \frac{\pi}{2},$$

где K и L суть точки прямой AB , удовлетворяющие указанному условию. Это геометрическое место будет кривой 2-го порядка, но только отличной от окружности.

С заменой отрезков на их синусы, переносятся в эллиптическую систему теоремы Менелая и Чебы; с помощью последней можно доказать, что медианы и высоты треугольника пересекаются соответственно в одной точке.

Другие приложения тригонометрии мы рассмотрим в следующих главах.

IX. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ПЛОЩАДЬ КРУГА.

Вопрос о длине окружности был в сущности уже затронут в начале предыдущей главы; здесь мы несколько обобщим постановку вопроса.

Определение 43. Длиной окружности называется предел обвода правильного вписанного (или описанного) n -угольника при $n \rightarrow \infty$.

161. Длина окружности с радиусом r равна

$$2\pi \sin r$$

Действительно, пусть $[MN] = a_n$ есть сторона правильного n -угольника, вписанного в окружность $O(r)$; в треугольнике OMN угол $MON = \frac{2\pi}{n}$. Проведем равноделящую OP этого угла и перейдем к треугольнику OPN (по теореме 31); формула (I) теоремы 155 дает

$$\sin \frac{a_n}{2} = \sin r \cdot \sin \frac{\pi}{n}.$$

Согласно определению 43, пишем

$$\begin{aligned} \text{длина } O(r) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_n) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n \frac{a_n}{2} \cdot \sin \frac{a_n}{2} \right); \end{aligned}$$

но по известной теореме о пределе $\left[\frac{\sin x}{x} \right]_{x \rightarrow 0}$ имеем

$$\lim \left(\frac{a_n}{2 \sin \frac{a_n}{2}} \right) = 1,$$

ибо, как легко видеть, a_n — бесконечно мала при $n \rightarrow \infty$; тогда

$$\text{длина } O(r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n \cdot \sin \frac{a_n}{2} \right).$$

Подставляя $\sin \frac{a_n}{2}$ из полученной выше формулы, имеем

$$\text{длина } O(r) = 2 \sin r \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{\pi}{n} \right);$$

в силу той же теоремы:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{\pi}{n} \right) = \pi,$$

а потому окончательно находим:

$$\text{длина } O(r) = 2\pi \sin r,$$

ч. и т. д.

Замечание. Если исходить из описанного n -угольника, то потребуется небольшое видоизменение изложенного рассуждения.

Длина дуги определяется подобным же образом, и для длины дуги, соответствующей центральному углу φ , получается величина

$$\varphi \cdot \sin r.$$

Определение 44. Площадью круга называется предел площади правильного вписанного (или описанного) n -угольника при $n \rightarrow \infty$.

162. Площадь круга радиуса r равна

$$4\pi \sin^2 \left(\frac{r}{2} \right).$$

Сделаем такое же построение, как в теореме 161; площадь треугольника OMN , на основании теоремы 95, равна

$$\frac{2\pi}{n} - 2 \angle N - \pi,$$

а потому (опр. 44):

$$\begin{aligned}\text{площадь круга} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n \left(\frac{2\pi}{n} + 2 \angle N - \pi \right) \right\} = \\ &= 2\pi - \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2n \left(\frac{\pi}{2} - N \right) \right\}.\end{aligned}$$

На основании формулы VI теоремы 155, примененной к треугольнику OPN , пишем:

$$\cos r = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{ctg} N.$$

Отсюда, между прочим, следует, что при $n \rightarrow \infty$ $\operatorname{ctg} N$ должен стремиться к 0, ибо $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$ в таком случае беспрельно возрастает; другими словами, угол N должен стремиться к $\frac{\pi}{2}$ при $n \rightarrow \infty$. Делаем дальнейшие преобразования:

$$\text{площадь круга} = 2\pi - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ n \frac{\frac{\pi}{2} - N}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - N \right)} \operatorname{ctg} N \right\};$$

а так как

$$\left[\frac{\frac{\pi}{2} - N}{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - N \right)} \right]_{N \rightarrow \frac{\pi}{2}} = 1,$$

то

$$\begin{aligned}\text{площадь круга} &= 2\pi - 2 \lim (n \cdot \operatorname{ctg} N) = \\ &= 2\pi - 2 \cos r \cdot \lim \left(n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right).\end{aligned}$$

Наконец, раскрываем последнюю неопределенность:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n} \right) = \pi,$$

и окончательно получаем:

$$\text{площадь круга} = 2\pi (1 - \cos r) = 4\pi \sin^2 \left(\frac{r}{2} \right),$$

ч. и т. д.

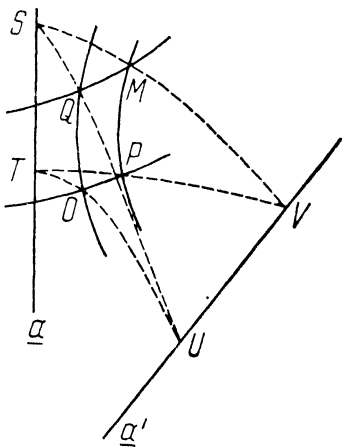
Х. ЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ КЛИФФОРДА.

[163]. Если через какую нибудь точку O поверхности Клиффорда провести поперечное и продольное сечения, отметить на первом т. P , а на втором — т. Q так, чтобы дуги OP и OQ были $< \frac{1}{4}$ соответствующих окружностей, и через т. P провести продольное, а через т. Q — поперечное сечение, то эти две последних окружности пересекаются в двух т. M и M' , причем для одной из них M обе дуги MP и MQ будут меньше, а для другой M' — больше $\frac{1}{4}$ соответствующих окружностей (черт. 37).

Теорема 135 дает почти все нужное; но возникает вопрос, существует ли такая точка пересечения, для которой обе дуги обладают требуемым свойством, и если существует, то как ее выбрать. Поэтому надо войти в некоторые подробности.

Пусть точки T и S оси a будут центрами поперечных сечений OP и QM , а точки U и V оси a' — центрами продольных сечений OQ и PM (128, опр. 37); плоскости сечений OP и OQ пересекаются по прямой TU , на которой лежит точка O , и т. д.

Центральный угол OTP , соответствующий дуге OP , будет меньше прямого, так как эта дуга $< \frac{1}{4}$ окружности; он измеряется соотнесенным ему отрезком $[UV] < \text{ппр.}$ Тем же отрезком измеряется угол QSM ; и точно также острые углы $O U Q$ и $P V M$ измеряются отрезком $[ST] < \text{ппо.}$



Черт. 37.

На основании теоремы 133 окружности PM и QM пересекаются в точках M и M' , диаметрально противоположных для обеих окружностей; эти точки лежат на прямой SV и принадлежат различным ее полупрямым. Чтобы выбрать одну из них, рассуждаем следующим образом. Определим тетраэдр $STUV$ по ребрам $[ST]$, $[UV]$ и по той полупрямой TU , которая содержит точку O ; этим вполне определяются плоские углы тетраэдра (часть их равна $\frac{\pi}{2}$ в силу теоремы 105).

Выясним, что ребро $[TV]$ содержит точку P . Действительно, окружность OP должна пересечь прр. $[TV]$ в некоторой т. X ; а так как угол XTO , равный углу VTU (32), будет острым, то X должно совпасть с P , а не с диаметрально противоположной т. P' . Точно также ребро $[SU]$ заключает точку Q .

Как мы видели выше, каждая из прр. $[SV]$ содержит по точке пересечения окружностей PM и QM ; ту из них, которая принадлежит ребру указанного тетраэдра, мы и обозначим через M . Теперь уже нетрудно заключить, что

$$\angle QSM = \angle OTP \text{ и } \angle PVM = \angle OUQ,$$

откуда и следует, что дуги MQ и MP будут $< 1/4$ соответствующих окружностей. Что же касается точки M' , то одна из полуокружностей MM' содержит т. P , и если $\smile MP < 1/4$ окружности, то $\smile M'P$ будет $> 1/4$ окружности, и т. д.

В дополнение к теореме добавим еще, что если в основу построения положить точки O' , P' , Q' , диаметрально противоположные точкам O , P , Q , то т. M и M' меняются местами.

Определение 45. Возьмем на поверхности Клиффорда какую-нибудь точку O и проведем через нее поперечное и продольное сечения; на первом отметим две диаметрально противоположные точки A и A' и при том так, чтобы т. O была серединой одной из полуокружностей AA' ; подобным же образом на продольном сечении определим полуокружность BOB' . Совокупность всевозможных точек M поверхности Клиффорда, которые получаем, давая точкам P и Q (см. предыдущее построение, связанное с черт. 37) всевозможные положения внутри указанных полуокружностей, называется основной областью точки O . Совокупность же точек M , для которых P совпадает с A или A' , либо Q совпадает

с B или B' , называется границей основной области.

164. Границу основной области образуют: поперечное сечение, плоскость которого перпендикулярна к плоскости AOA' , и продольное сечение, плоскость которого перпендикулярна к плоскости BOB' .

Для доказательства вспомним построения и обозначения теоремы 163 и допустим, что т. Q совпадает с B или с B' . Тогда ($OQ = \frac{1}{4}$ окружности, а угол $OUQ = \frac{\pi}{2}$; но этот угол будет линейным углом двугранного угла при α' , образуемого плоскостями поперечных сечений OP и QM . Таким образом, точка M лежит на поперечном сечении, плоскость которого перпендикулярна к плоскости AOA' ; при этом указанное поперечное сечение будет одним и тем же, совпадает ли Q с B или с B' , в силу единственности перпендикулярной плоскости. Подобным же образом рассматривается и другая часть границы.

После изложенного нетрудно убедиться в том, что поверхность Клиффорда слагается из двух основных областей с общей границей, а именно: из основных областей двух диаметрально противоположных точек O и O' . Для нас сейчас важнее будет разобрать другие вопросы, связанные с определенной основной областью.

Определение 46. Сделав построение, указанное в определении 45, условимся под величиной дуги OP понимать ее длину, взятую со знаком плюс, когда точка P принадлежит определенной четверти окружности (например, дуге OA) поперечного сечения; если же т. P принадлежит другой четверти ($\sim OA'$) окружности, то величина дуги OP равна ее длине, взятой со знаком минус. Полученное таким образом вещественное число обозначаем через x . Подобным же путем определяется величина дуги OQ и обозначается буквой y . Числа x и y называются координатами точки M в основной области т. O

Бросается в глаза полная аналогия этих „координат“ с прямоугольными координатами на евклидовой плоскости; это позволяет нам применять обычные термины (как то: абсцисса, ордината и др.) и в случае поверхности Клиффорда.

[165]. Числа x и y удовлетворяют неравенствам:

$$|x| < \frac{\pi}{2} \sin r; |y| < \frac{\pi}{2} \cos r;$$

и обратно: всякие два вещественные числа x и y , удовлетворяющие указанным неравенствам, определяют одну и только одну точку в данной основной области.

Действительно, прямое утверждение непосредственно вытекает из определения 46, теоремы 128 и из определения длины дуги. Для доказательства обратного строим дуги OP и OQ , по величине равные числам x и y , и затем определяем т. M по указаниям теоремы 163 и определения 45.

166. Между точками основной области поверхности Клиффорда и внутренними точками прямоугольника евклидовой плоскости со сторонами, равными:

$$\pi \sin r \text{ и } \pi \cos r$$

можно установить одно-однозначное соответствие (как именно, см. доказательство).

Действительно, возьмем на евклидовой плоскости прямоугольную систему координат с началом в центре прямоугольника и направим ось x -ов параллельно той его стороне, длина которой равна $\pi \sin r$, а ось y -ов — параллельно стороне, равной $\pi \cos r$. Условимся далее считать соответственными точку основной области и точку прямоугольника в том и только в том случае, когда „координаты“ первой соответственно равны прямоугольным координатам второй. Теперь утверждение теоремы становится очевидным.

167. Внутри основной области поверхности Клиффорда, при известных условиях, осуществляется геометрия Евклида.

При доказательстве мы будем исходить из того обсто-

ательства, что всякую отвлеченную систему геометрии можно различным образом истолковывать, подводя под ее основные понятия различные конкретные образы и соблюдая при этом лишь то условие, чтобы утверждения аксиом при таком истолковании оставались в силе. В частности, если между элементами какой-либо совокупности и точками евклидова пространства можно установить одно-однозначное соответствие, то в данной совокупности получается одно из возможных истолкований евклидовой геометрии; при этом упомянутое одно-однозначное соответствие укажет, какие именно образы надо подвести под отвлеченные понятия „точки“, „прямой“ и т. д.

В рассматриваемом случае речь идет о точках поверхности Клиффорда, ограниченных основной областью, и о точках евклидова прямоугольника. Это ограничение необходимо все время иметь в виду; сопоставление всей поверхности Клиффорда с евклидовой плоскостью было бы невозможно уже потому, что первая складывается из двух основных областей, а вторая не исчерпывается двумя соответствующими прямоугольниками.

Одно-однозначное соответствие, указанное в теореме 166, дает руководящую нить при нахождении тех образов на поверхности Клиффорда, которые соответствуют основным понятиям евклидовой геометрии; в этом и заключаются те „известные условия“, о которых говорится в теореме. Что в данном случае приходится понимать под „точкой“, ясно из теоремы 166; тогда под „прямой“ придется понимать геометрическое место таких точек основной области, координаты которых связаны соотношением:

$$Ax + By + C = 0,$$

где A , B , C — постоянные. (Точнее сказать, речь здесь идет не о целой прямой, а о ее части, лежащей внутри вышеупомянутого прямоугольника).

Выясним, что представляет собою такое геометрическое место. Легко видеть, что при $A=0$ получается ограниченная основной областью дуга поперечного сечения, а при $B=0$ — дуга продольного сечения. В других случаях данное уравнение можно переписать в виде:

$$y = ax + b,$$

где для простоты будем считать коэффициент $b=0$; этого всегда можно достигнуть „преобразованием координат“, меняя соответствующим образом ограничивающие их неравенства. Итак, остановимся на уравнении

$$y = ax.$$

В частном случае

$$a = \pm \operatorname{ctg} r$$

оно дает прямолинейную образующую поверхности Клиффорда. Действительно, возьмем прямолинейную образующую, проходящую через т. O и лежащую в I и III „координатных углах“; отметим на ней какую-нибудь точку M внутри основной области и построим ее координаты x и y (будем иметь в виду черт. 37, на котором мысленно проведем образующую OM). Обозначим длину наименьшего отрезка $[OM]$ через φ ; так как $OM \parallel TS$ и прямые TO и SM будут их общими перпендикулярами, то, в силу теорем 115 и 121, наименьший отрезок $[TS]$ тоже $=\varphi$. Это же самое имеет место и для отрезка $[UV]$. Тогда соотнесенные им углы

$$\angle UTV = \varphi \text{ и } \angle TVS = \varphi$$

и определение длины дуги дает

$$x = \frown OP = \varphi \cdot \sin r; \quad y = \frown PM = \varphi \cdot \cos r,$$

откуда

$$y = x \cdot \operatorname{ctg} r, \text{ и т. д.}$$

Наконец, в общем случае получаем геометрическое место точек, которое определяется подобно винтовой линии евклидова пространства; к тому же надо вспомнить, что поверхность Клиффорда есть не что иное, как пря-

мой круговой цилиндр эллиптического пространства. Такое геометрическое место точек, определяемое приведенным выше уравнением, условимся называть эллиптической винтовой линией. Итак, роль прямой на поверхности Клиффорда вообще играет только-что названная линия, а в частности прямолинейные образующие, поперечные и продольные сечения.

Свойства сочетания, расположения, равенства и непрерывности без труда переносятся из евклидовой геометрии на поверхность Клиффорда, благодаря указанному одно-однозначному соответствию между точками. Мы войдем еще в некоторые подробности по поводу постулата Евклида, представляющего наиболее характерную особенность обычной геометрии. Из теорем Саккери-Лежандра*) мы знаем, что, при наличии аксиом других групп, этот постулат равносителен предложению о равенстве суммы углов треугольника двум прямым; кроме того известно, что если последним свойством обладает какой-нибудь один треугольник, то во всяком треугольнике сумма углов равна $2d$. Следовательно, прежде всего нам нужно выяснить вопрос о величине угла в настоящем истолковании. Согласно общему духу этого истолкования, величину угла между двумя „прямыми“:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

мы должны определить как вещественное число α , удовлетворяющее условиям

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} ; \quad 0 \leq \alpha < \pi.$$

Но нам уже приходилось определять углы между некоторыми линиями на поверхности Клиффорда, ныне выступающими в роли прямых (см. теоремы 134 и 136). Проверим (на одном примере), что новое общее определе-

*) Названные теоремы можно найти, например, в моих „Основаниях геометрии“ (стр. 151 — 160).

ние величины угла в указанных частных случаях приводит к прежнему. Возьмем именно поперечное сечение

$$B_1 y + C_1 = 0$$

и прямолинейную образующую

$$x \operatorname{ctg} r - y = 0;$$

согласно общей формуле, определяем угол между ними

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-B_1 \operatorname{ctg} r}{-B_1} = \operatorname{ctg} r,$$

откуда $\alpha = \frac{\pi}{2} - r$ в согласии с теоремой 136.

Возвращаясь к основной области точки O , проведем через последнюю прямолинейную образующую, на которой отметим т. M ; построив ее координаты, получим треугольник OMP (черт. 37, где нужно мысленно провести образующую OM). Угол при т. P будет прямым (134),

угол же MOP должен $= \frac{\pi}{2} - r$ (он должен быть непре-

менно острым, так как иначе сумма углов треугольника OMP была бы $> 2d$, что невозможно по первой теореме Саккери-Лежандра); точно также угол $OMP = r$ (136). Складывая, находим

$$\frac{\pi}{2} + \left[\frac{\pi}{2} - r \right] + r = \pi,$$

и мы воочию убеждаемся в том, что на поверхности Клиффорда господствует геометрия Евклида.

Итак, наше предложение доказано, и установлен его точный смысл. Изложенным можно воспользоваться для изучения некоторых свойств поверхности Клиффорда; для этого достаточно евклидовы теоремы перевести на „другой язык“. Таким путем, например, можно изучать свойства эллиптических винтовых линий и т. п.

XI. НАЧАЛА ПРИЛОЖЕНИЯ АНАЛИЗА К ГЕОМЕТРИИ.

Мы начнем с вывода элементов аналитической геометрии на плоскости. В основу дальнейшего положим следующие построения и обозначения.

Возьмем на данной плоскости автополярный треугольник OXY (черт. 38) и наряду с ним рассмотрим и три других автополярных треугольника с теми же самыми вершинами; мы знаем, что эти 4 треугольника исчерпывают плоскость. Первоначально данный треугольник OXY условимся обозначать с помощью № I, а под символами $[OX]$, $[OY]$, $[XY]$ будем понимать полупрямые, служащие его сторонами; другие же полупрямые, взаимно дополнительные с ними, обозначим соответственно через доп. $[OX]$, доп. $[OY]$, доп. $[XY]$. Автополярный треугольник OXY , имеющий с №I общую сторону $[OY]$, обозначим №II; имеющий общую сторону $[XY]$ — №III, и, наконец, имеющий общую сторону $[OX]$ — №IV.

Пусть на плоскости задана какая-нибудь точка M ; проведем полупрямые $[ON]$, $[XP]$, $[YQ]$, содержащие т. M .

Определение 47. Прямоугольными координатами т. M называются три положительных или равных нулю числа x_0 , x_1 , x_2 , определяемые следующим образом;

x_0 = кратчайшему расстоянию $[OM]$;

$x_1 = [YM]$, причем для треугольников I и II берем отрезок $[YM]$, не превышающий ппр., а для треугольников III и IV — отрезок, не меньший

ппр. (на прямой XU выбираем наименьший отрезок);

$x_2 = [XM]$, причем для треугольников I и IV берем отрезок $[XM] \leq \text{ппр.}$, а для треугольников II и III — отрезок $\geq \text{ппр.}$ (на ппр. $[XU]$ — наименьший, а на доп. $[XU]$ — наибольший отрезок).

Из сделанных определений сейчас же вытекают следующие условия для прямоугольных координат:

$$\left. \begin{array}{l} x_0 \leq \frac{\pi}{2} \\ \text{если } x_0 < \frac{\pi}{2}, \text{ то } x_1 \text{ и } x_2 < \pi \\ \text{„ } x_0 = \frac{\pi}{2}, \text{ „ } x_1 \leq \frac{\pi}{2} \text{ и } x_2 < \pi \end{array} \right\} \quad (*)$$

Далее столь же непосредственно выводим такие заключения:

1) Для точек O, X, Y две из координат $= \frac{\pi}{2}$, а третья $= 0$.

2) Для прямых XU, OX, OY соответственно имеем:

$$x_0 = \frac{\pi}{2}, \text{ или } x_1 = \frac{\pi}{2}, \text{ или } x_2 = \frac{\pi}{2},$$

причем принадлежность точки той или другой ппр. определяется по неравенству, связывающему с $\frac{\pi}{2}$ соответственно следующую координату:

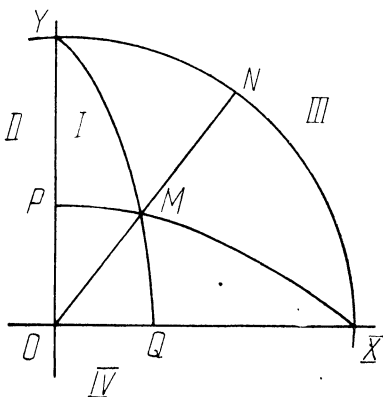
$$x_2, x_2, \text{ или } x_1.$$

3) Наконец, положение точки внутри того или другого из треугольников OXU определяется следующими неравенствами между координатами и $\frac{\pi}{2}$:

$$\text{для } \text{№ I: } x_1 < \frac{\pi}{2} \quad x_2 < \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{для } \text{№ II: } x_1 &< \frac{\pi}{2} & x_2 &> \frac{\pi}{2} \\ \text{„ } \text{№ III: } x_1 &> \frac{\pi}{2} & x_2 &> \frac{\pi}{2} \\ \text{„ } \text{№ IV: } x_1 &> \frac{\pi}{2} & x_2 &< \frac{\pi}{2} . \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е. В предыдущих определениях нарушена симметрия, что стоит в связи с полной определяемостью треугольника OXY уже с помощью задания двух элементов. Особая роль отведена прямой XY : при переходе через нее нарушается непрерывное изменение координат x_1 и x_2 , но в эллиптической плоскости всегда можно выбрать другой путь (ведь прямая не делит плоскости на две раздельные части), который даст нам и в этом случае непрерывный переход.



Черт. 38.

168. Для того чтобы три числа (положительные или равные 0) x_0, x_1, x_2 были прямоугольными координатами точки, необходимо и достаточно соблюдение условий (*) в связи с соотношением:

$$\cos^2 x_0 + \cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 = 1.$$

Пусть сначала нам дана точка M с координатами x_0, x_1, x_2 ; выполнение условий (*) в таком случае уже известно. Переходим к новому соотношению между координатами, причем будем иметь в виду черт. 38 и соответствующие построения. Оставляя в стороне случаи, когда точка M лежит на прямых XY, OX, OY и когда,

решение вопроса упрощается, перейдем сразу к допущению, что т. M находится внутри одного из треугольников OXY ; если M принадлежит I или III, то т. N лежит внутри ппр. $[XY]$, а если M принадлежит II или IV, то N лежит внутри доп. $[XY]$. Условимся во всех случаях под символом $[MN]$ понимать отрезок $<$ ппр., так что

$$[MN] = \frac{\pi}{2} - x_0.$$

Определим треугольник MNX по сторонам $[XM] = x_2$ и $[MN]$; в этом треугольнике имеется только один угол N , равный прямому, так как в противном случае сторона $[XM]$ была бы тоже = ппр., что здесь исключается. Поэтому, ссылаясь на теорему 56, приходим к выводу, что сторона $[NX]$ будет $>$ ппр. или $<$ ппр., смотря по тому, будет ли $x_2 > \frac{\pi}{2}$ или $< \frac{\pi}{2}$. Наконец, на основании формулы (III) теоремы 155 пишем:

$$\cos x_2 = \sin x_0 \cdot \cos [NX].$$

Подобные же заключения извлекаем из треугольника MNY и приходим к аналогичной зависимости:

$$\cos x_1 = \sin x_0 \cdot \cos [NY];$$

отсюда сейчас же получается равенство:

$$\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 = \sin^2 x_0 (\cos^2 [NX] + \cos^2 [NY]) \quad (**)$$

Теперь необходимо найти соотношение между $[NX]$ и $[NY]$. Если т. M лежит внутри треугольника I, то оба эти отрезка $<$ ппр. и являются частями полупрямой $[XY]$, а потому

$$[NX] + [NY] = \frac{\pi}{2}.$$

Если т. M принадлежит треугольнику II, то $[NX]$ содержит ппр. $[XY]$, а $[NY]$ содержится в доп. $[XY]$, так что

$$[NX] - [NY] = \frac{\pi}{2};$$

подобным же образом, в случае принадлежности т. M треугольнику IV, имеем:

$$[NY] - [NX] = \frac{\pi}{2}.$$

Наконец, когда M лежит внутри треугольника III, то оба отрезка $[NX]$ и $[NY] >$ ппр., а точка N лежит внутри $[XY]$; следовательно, каждый из них содержит дополнительную ппр. $[XY]$, и легко видеть, что их сумма равна удвоенной ппр. плюс сумма отрезков $[NX]$ и $[NY]$, меньших ппр., т. е.

$$[NX] + [NY] = \pi + \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, во всех четырех случаях имеем:

$$\cos [NY] = \pm \sin [NX];$$

подставляя в (**), находим:

$$\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 = \sin^2 x_0,$$

откуда и следует искомая зависимость.

Переходя к обратному предложению, допустим, что нам даны три числа x_0, x_1, x_2 , удовлетворяющие всем условиям теоремы. Если два из них $= \frac{\pi}{2}$, дело ясно.

Пусть этим свойством обладает одно из них; если

$$x_j = \frac{\pi}{2},$$

то основное соотношение дает:

$$\cos^2 x_i = \sin^2 x_k = \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - x_k \right),$$

или

$$\cos x_i = \pm \cos \left(\frac{\pi}{2} - x_k \right)$$

(здесь i, k, j суть различные числа из ряда 1, 2, 3); далее находим:

$$\text{либо } x_i + x_k = \frac{\pi}{2}, \quad \text{либо } x_i - x_k = \frac{\pi}{2}.$$

В частности пусть $x_0 = \frac{\pi}{2}$; тогда имеем:

$$\text{либо } x_1 + x_2 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{либо } x_2 - x_1 = \frac{\pi}{2}.$$

(равенство $x_1 - x_2 = \frac{\pi}{2}$ здесь невозможно, так как x_1 не может быть $>$ ппр. [см. (*)]). Вспоминая определение прямоугольных координат, скажем, что в первом случае точка M лежит внутри ппр. $[XY]$, деля ее на части, равные x_1 и x_2 ; а во втором — точка M лежит внутри доп. $[XY]$, так что ее часть $[YM] = x_1$. Подобным же образом рассматриваются и другие случаи равенства одной из координат числу $\frac{\pi}{2}$, и всегда получается на плоскости вполне определенная точка M , имеющая своими координатами данные числа.

Положим теперь, что ни одно из чисел $x_0, x_1, x_2 \neq \frac{\pi}{2}$. Опишем из точки Y окружность радиусом $= x_1$,

если $x_1 < \frac{\pi}{2}$, или радиусом $= (\pi - x_1)$, если $x_1 > \frac{\pi}{2}$;

точно также из т. X опишем окружность радиусом $= x_2$ или $= \pi - x_2$, в зависимости от величины координаты x_2 .

Докажем, что эти две окружности пересекаются в четырех точках. Теорема 85 указывает необходимые и достаточные условия:

$$|r_1 - r_2| < \frac{\pi}{2} < r_1 + r_2 \quad \text{и} \quad r_1 + r_2 + \frac{\pi}{2} > \pi,$$

так как в рассматриваемом случае $d = \frac{\pi}{2}$.

Каждый из радиусов в отдельности $< \frac{\pi}{2}$, а потому неравенство $|r_1 - r_2| < \frac{\pi}{2}$ становится очевидным; точно также второе неравенство сводится к такому:

$$r_1 + r_2 > \frac{\pi}{2},$$

т. е. к правой половине первого, так что все дело и сводится к доказательству этого неравенства. Основное соотношение дает:

$$\cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 < 1.$$

Но

$$\cos r_1 = \pm \cos x_1 \text{ и } \cos r_2 = \pm \cos x_2,$$

так что

$$\cos^2 r_1 + \cos^2 r_2 < 1$$

$$\cos^2 r_1 < \sin^2 r_2$$

$$\cos^2 r_1 < \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - r_2 \right),$$

откуда

$$r_1 > \frac{\pi}{2} - r_2$$

или

$$r_1 + r_2 > \frac{\pi}{2},$$

ч. и т. д.

Итак, наши окружности пересекаются в четырех точках; эти точки должны быть попарно симметричны относительно прямой XU и, кроме того, обе прр. $[XY]$ совершенно одинаково можно рассматривать как расстояние между центрами. Отсюда нетрудно вывести, что указанные четыре точки пересечения располагаются по одной в каждом из автополярных треугольников OXU . Из этих точек одна и только одна будет иметь своими двумя координатами данные числа x_1 и x_2 , а не числа им попол-

нительные (см. приведенные выше неравенства). Обозначим ее третью координату через x_0' ; существование основного соотношения дает равенство:

$$\cos^2 x_0' = \cos^2 x_0,$$

откуда

$$x_0' = x_0,$$

ибо оба эти числа $< \frac{\pi}{2}$.

Итак, по данным числам x_0, x_1, x_2 найдена вполне определенная точка плоскости, имеющая эти числа своими координатами, ч. и т. д.

От прямоугольных координат мы сейчас перейдем к другим, которые впервые встречаются у Киллинга*) и носят имя Вейерштрасса; первый автор говорит, что этими координатами он обязан своему учителю Вейерштрассу, который пользовался ими в 1872 г. в математическом семинарии. С соответственными изменениями названные координаты вводятся и в геометрии Лобачевского.

Определение 48. Координатами Вейерштрасса называются числа:

$$\omega = \cos x_0, \quad \eta = \cos x_1, \quad \xi = \cos x_2.$$

Вспоминая доказанное для прямоугольных координат, можно сделать следующие утверждения относительно этих новых чисел.

Всегда имеем:

$$\xi^2 + \eta^2 + \omega^2 = 1$$

$$\omega \geq 0;$$

если $\omega > 0$, то ξ и $\eta > -1$,

если $\omega = 0$, то $\eta \geq 0$ и $\xi > -1$.

Если числа ξ, η, ω подчинены указанным условиям, то между точками эллиптической плоскости и совокупностями (ξ, η, ω) существует одно однозначное соответствие.

*) Killing. Ueber zwei Raumformen mit constanter positiver Krümmung (Journ. für d. reine u. ang. Math., Bd. 86 (1879), p. 74).

Замечание. Определение точек эллиптической плоскости с помощью координат Вейерштрасса напоминает определение точек шаровой поверхности:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

с помощью декартовых координат.

Мы введем еще одну систему координат, которую можно будет по аналогии назвать полярной:

Определение 49. Полярными координатами точки M называются числа ρ и α , определяемые следующим образом [здесь имеются в виду построения и обозначения черт. 38]:

$$\rho = [OM] = x_0;$$

$\alpha =$ углу между ппр. $[OX]$ и $[ON]$, если M принадлежит треугольникам I или II,

$\alpha = \pi +$ угол между ппр. $[OX]$ и доп. $[ON]$, если M принадлежит III или IV (если M лежит на пр. XY , то применяется первое правило).

(В пояснение надо сказать, что угол между полупрямыми есть угол в определяемом ими треугольнике.)

Исходя из сделанных определений, без особого труда убедимся, что полярные координаты удовлетворяют неравенствам:

$$0 \leq \rho \leq \frac{\pi}{2} \text{ и } 0 \leq \alpha < 2\pi,$$

причем различные квадранты (для α) соответствуют различным автополярным треугольникам I, II, III и IV; точно также ясно, что задание ρ и α вполне определяет соответствующую точку плоскости.

169. Между координатами Вейерштрасса и полярными имеют место зависимости:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \cos \rho \\ \xi &= \sin \rho \cdot \cos \alpha_2^1 \\ \eta &= \sin \rho \cdot \sin \alpha_2^1 \end{aligned} \right\}$$

В самом деле, первая формула очевидна. Далее возьмем треугольник MNX , определенный как выше (черт. 38); в двух случаях этого треугольника не существует, а именно если точка M лежит на одной из прямых XU и OX . В первом случае нетрудно проверить соотношение:

$$x_1 = \pm \left(\frac{\pi}{2} - x_2 \right);$$

кроме того здесь имеем

$$\rho = \frac{\pi}{2} \text{ и } \alpha = x_2,$$

так что искомые формулы проверяются непосредственно. Во втором случае будет

$$x_1 = \frac{\pi}{2},$$

и дальше различаем два подслучая:

1) если M принадлежит ппр. $[OX]$, то

$$x_2 = \frac{\pi}{2} - x_0 \text{ и } \alpha = 0;$$

2) если M принадлежит ппр. доп. $[OX]$, то

$$x_2 = \frac{\pi}{2} + x_0 \text{ и } \alpha = \pi;$$

в обоих случаях формулы оказываются верными, как в этом легко убедиться. Итак, возвратимся к треугольнику MNX и выпишем уже известную зависимость

$$\cos x_2 = \sin x_0 \cdot \cos [NX],$$

и дело сводится к выражению $[NX]$ через α .

Во всяком случае этот отрезок соотнесен либо углу α , либо углу $(\alpha - \pi)$, либо углам дополнительным. Различаем следующие случаи:

1) если M принадлежит I, то $[NX]$ и α оба $< \frac{\pi}{2}$, так что

$$[NX] = \alpha;$$

2) если M принадлежит II, то $[NX]$ и α оба лежат в границах между $\frac{\pi}{2}$ и π , так что и здесь

$$[NX] = \alpha;$$

3) если M принадлежит III, то

$$\alpha - \pi < \frac{\pi}{2} \text{ и } [NX] > \frac{\pi}{2};$$

следовательно, имеет место такая зависимость:

$$[NX] = \pi - (\alpha - \pi) = 2\pi - \alpha;$$

4) если M принадлежит IV, то

$$\alpha - \pi > \frac{\pi}{2} \text{ и } [NX] < \frac{\pi}{2},$$

так что

$$[NX] = \pi - (\alpha - \pi) = 2\pi - \alpha.$$

Пробегаая все эти случаи, убеждаемся, что всегда имеет место равенство

$$\cos [NX] = \cos \alpha,$$

а это сейчас же дает

$$\cos x_2 = \sin x_0 \cdot \cos \alpha,$$

или

$$\xi = \sin \rho \cdot \cos \alpha.$$

Для определения координаты η обращаемся к основной зависимости:

$$\eta^2 = 1 - \cos^2 \rho - \sin^2 \rho \cdot \cos^2 \alpha = \sin^2 \rho \cdot \sin^2 \alpha,$$

откуда

$$\eta = \sin \rho \cdot \sin \alpha,$$

ибо $\sin \rho$ всегда > 0 , а знак η одинаков со знаком $\sin \alpha$ (см. опр. 47, 48, 49).

170. Величина одного из отрезков d , определяемых точками $(\xi_1, \eta_1, \omega_1)$ и $(\xi_2, \eta_2, \omega_2)$, дается равенством:

$$\cos d = \xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \omega_1 \omega_2.$$

Пусть даны две точки M_1 и M_2 с полярными коорди-

натами $M_1(\rho_1, \alpha_1)$ и $M_2(\rho_2, \alpha_2)$ (черт. 39). Если одна из этих точек совпадает с точкой O , или если они совпадают друг с другом, то искомая формула проверяется непосредственно. Если точки O , M_1 , M_2 различны, но лежат на одной прямой, то в этом случае имеем:

либо $\alpha_2 = \alpha_1$, либо $\alpha_2 - \alpha_1 = \pm \pi$ (опр. 49);

соответственно этому разделению находим:

$$\cos d = \cos(\rho_1 - \rho_2),$$

$$\text{или } \cos d = \cos(\rho_1 + \rho_2),$$

и формулы 169 позволяют вывести отсюда искомое соотношение.

Наконец, в остальных случаях можно говорить о треугольнике M_1OM_2 . Прежде всего строим треугольник N_1ON_2 и определяем его по ппр. $[ON_1]$ и $[ON_2]$, содержащим

точки M_1 и M_2 соответственно, а потом переходим к треугольнику M_1OM_2 по теореме 32; таким образом, в этом треугольнике имеем:

$$[OM_1] = \rho_1, [OM_2] = \rho_2, \angle M_2OM_1 = \angle N_2ON_1,$$

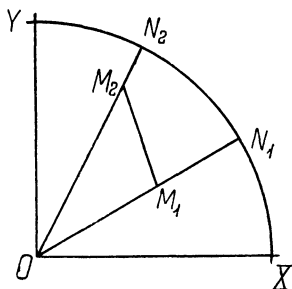
и все дело сводится к нахождению угла между ппр. $[ON_1]$ и $[ON_2]$.

Если M_1 и M_2 обе принадлежат треугольникам I и II, то

$$\angle N_2ON_1 = \pm(\alpha_2 - \alpha_1),$$

как в этом легко убедиться. Если одна из данных точек (например, M_1) принадлежит III или IV, а другая удовлетворяет прежнему заданию, то, согласно определению 49, угол между ппр. $[OX]$ и доп. $[ON_1]$ равен $(\alpha_1 - \pi)$, причем доп. $[ON_1]$ проходит через I или II; подобно предыдущему находим угол между доп. $[ON_1]$ и $[ON_2]$, который оказывается равным

$$\pm(\alpha_2 - \alpha_1 + \pi);$$



Черт. 39.

тогда, чтобы перейти к углу между ппр. $[ON_1]$ и $[ON_2]$, надо взять дополнительный угол, так что

$$\angle N_2ON_1 = \pi \mp (\alpha_2 - \alpha_1 + \pi),$$

откуда

$$\angle N_2ON_1 = -(\alpha_2 - \alpha_1), \text{ или } = 2\pi + (\alpha_2 - \alpha_1).$$

Если же обе точки принадлежат III или IV, то угол между доп. $[ON_1]$ и доп. $[ON_2]$ равен

$$\pm \{(\alpha_2 - \pi) - (\alpha_1 - \pi)\} = \pm (\alpha_2 - \alpha_1),$$

и тому же самому равен искомый угол N_2ON_1 . Пробегая все эти случаи, приходим к равенству

$$\cos \angle M_2OM_1 = \cos (\alpha_2 - \alpha_1);$$

тогда 1-ая теорема косинусов из треугольника M_1OM_2 дает

$$\begin{aligned} \cos d &= \cos \rho_1 \cdot \cos \rho_2 + \sin \rho_1 \cdot \sin \rho_2 \cdot \cos (\alpha_2 - \alpha_1) = \\ &= \cos \rho_1 \cdot \cos \rho_2 + (\sin \rho_1 \cdot \cos \alpha_1) \cdot (\sin \rho_2 \cdot \cos \alpha_2) + \\ &\quad + (\sin \rho_1 \cdot \sin \alpha_1) \cdot (\sin \rho_2 \cdot \sin \alpha_2); \end{aligned}$$

наконец, теорема 169 приводит к искомому

$$\cos d = \omega_1 \cdot \omega_2 + \xi_1 \cdot \xi_2 + \eta_1 \cdot \eta_2.$$

171. Для того чтобы $[M_1M_2]$ было = ппр., необходимо и достаточно соблюдение условия

$$\xi_1 \cdot \xi_2 + \eta_1 \cdot \eta_2 + \omega_1 \cdot \omega_2 = 0.$$

Предложение непосредственно вытекает из теоремы 170.

172. Если дана точка $(\xi_0, \eta_0, \omega_0)$, то уравнение ее поляры будет

$$\xi_0 \cdot \xi + \eta_0 \cdot \eta + \omega_0 \cdot \omega = 0.$$

Действительно, поляра есть геометрическое место точек, отстоящих от данной на расстояние = ппр., и остается сослаться на теорему 171.

[173]. Если в уравнении

$$\xi_0 \cdot \xi + \eta_0 \cdot \eta + \omega_0 \cdot \omega = 0$$

постоянные числа ξ_0, η_0, ω_0 могут быть приняты за координаты Вейерштрасса для некоторой точки, то это уравнение определяет поляру точки $(\xi_0, \eta_0, \omega_0)$.

Предложение непосредственно вытекает из предыдущей теоремы.

Представляет только интерес подробно выяснить, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты данного уравнения, чтобы их можно было принять за вейерштрассовы координаты. Эти условия были перечислены после определения 48; так как умножением на (-1) всегда можно достигнуть неравенства $\omega_0 > 0$, а при $\omega_0 = 0$ — добиться, чтобы $\eta_0 \geq 0$, то существенным является условие

$$\xi_0^2 + \eta_0^2 + \omega_0^2 = 1.$$

Последние соображения дают повод ввести следующее определение:

Определение 50. Уравнение $a_0\xi + b_0\eta + c_0\omega = 0$ называется каноническим, если

$$a_0^2 + b_0^2 + c_0^2 = 1, \quad c_0 > 0,$$

а в случае $c_0 = 0$ имеем $b_0 \geq 0$.

Легко видеть, что всякое однородное уравнение 1-ой степени можно привести к каноническому виду. Действительно, для этого достаточно умножить данное уравнение на

$$\pm \frac{1}{\sqrt{a_0^2 + b_0^2 + c_0^2}},$$

выбрав знак одинаковым со знаком c_0 , а в случае $c_0 = 0$ — со знаком b_0 .

Теорема 173 говорит теперь, что каноническое уравнение всегда определяет прямую; это утверждение можно обобщить:

174. Всякая прямая определяется однородным уравнением 1-ой степени относительно вейерштрассовых координат, и обратно.

В самом деле, если дана прямая, то значит дан и ее полюс; тогда теорема 172 дает искомое. Чтобы доказать обратное утверждение, приводим данное уравнение к каноническому виду и ссылаемся на теорему 173.

Каноническое уравнение прямой особенно удобно тем, что, при пользовании им, многие формулы получают более простой вид; сейчас мы увидим это на двух примерах.

175. Угол φ между двумя прямыми, заданными каноническими уравнениями

$$a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \omega = 0 \text{ и } a_2 \xi + b_2 \eta + c_2 \omega = 0,$$

определяется по формуле

$$\cos \varphi = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2.$$

Действительно, угол φ численно равен соотнесенному отрезку (на поляре его вершины); этот последний равен одному из отрезков, определяемых полюсами данных прямых (40); затем ссылаемся на теоремы 173 и 170.

Как следствие, отсюда выводится условие перпендикулярности данных прямых:

$$a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2 = 0.$$

176. Расстояние q от точки $(\xi_0, \eta_0, \omega_0)$ до прямой $a_0 \xi + b_0 \eta + c_0 \omega = 0$, заданной каноническим уравнением, определяется по формуле

$$\sin q = |a_0 \xi_0 + b_0 \eta_0 + c_0 \omega_0|.$$

Действительно, это расстояние равно $\frac{\pi}{2}$ без наименьшего отрезка между данной точкой и полюсом данной прямой; а координаты этого полюса будут (a_0, b_0, c_0) (173), откуда и следует искомая формула. Здесь берем численное значение в правой части, так как q не превышает $\frac{\pi}{2}$ и потому

$$\sin q > 0.$$

Коэффициенты a_0, b_0, c_0 в каноническом уравнении прямой могут быть названы „координатами прямой“; эти координаты и координаты точки входят в уравнение совершенно симметрично; в этом заключается корень закона взаимности (в плоскости). Каноническое уравнение прямой обладает известными преимуществами; но иногда бывает целесообразно говорить вообще об однородном уравнении 1-ой степени (см. теорему 174). Точно также,

наряду с вейерштрассовыми координатами, рассматривается некоторое их обобщение.

Определение 51. Однородными координатами (x, y, z) точки называются три числа, пропорциональные координатам Вейерштрасса:

$$x = k \cdot \xi, \quad y = k \cdot \eta, \quad z = k \cdot \omega,$$

где $k \neq 0$ (так что x, y, z зараз не могут $= 0$).

Таким образом, для каждой точки имеется бесчисленное множество различных систем однородных координат; все они задаются предыдущими равенствами. Если даны однородные координаты, то вейерштрассовы, благодаря основному соотношению, определяются однозначно; в самом деле, имеем:

$$x^2 + y^2 + z^2 = k^2,$$

откуда

$$\xi = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \eta = \pm \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\omega = \pm \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

где знак выбирается так, чтобы $\omega > 0$ (а при $\omega = 0$ чтобы $\eta > 0$).

Само собою понятно, что в однородных координатах прямая попрежнему задается однородным уравнением 1-ой степени, и обратно.

То обстоятельство, что прямая в эллиптической геометрии задается линейным уравнением, позволяет перенести сюда все те выводы обычной аналитической геометрии, которые основаны на этом свойстве прямой *).

*) Собственно основы аналитической геометрии на плоскости нами уже заложены; в виде примера мы намерены разобрать несколько дополнительных вопросов.

Так например, для того, чтобы три точки лежали на одной прямой, необходимо и достаточно соблюдение условия:

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

(оно будет справедливым и в вейерштрассовых координатах). Точно также, если даны две точки $M_1 (x_1, y_1, z_1)$ и $M_2 (x_2, y_2, z_2)$, то точки M прямой $M_1 M_2$ задаются координатами (x, y, z) :

$$x = x_1 + lx_2; \quad y = y_1 + ly_2; \quad z = z_1 + lz_2,$$

где l есть произвольный параметр.

Здесь нам будет удобнее перейти к вейерштрассовым координатам, предполагая, что таким образом определены и данные точки; тогда имеем:

$$k\xi = \xi_1 + l\xi_2; \quad k\eta = \eta_1 + l\eta_2; \quad k\omega = \omega_1 + l\omega_2,$$

где k есть коэффициент пропорциональности, определяемый из основного соотношения между координатами Вейерштрасса:

$$\begin{aligned} k^2 &= (\xi_1 + l\xi_2)^2 + (\eta_1 + l\eta_2)^2 + (\omega_1 + l\omega_2)^2 = \\ &= 1 + 2l(\xi_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 + \omega_1\omega_2) + l^2 = \\ &= 1 + 2l \cos d + l^2 \end{aligned} \quad (170)$$

Постараемся выяснить геометрическое значение параметра l ; для этого применим формулу (170) к отрезкам (M_1M) и (MM_2) , а потом перейдем к синусам:

$$\begin{aligned} \cos[M_1M] &= \frac{1}{k} \{ \xi_1(\xi_1 + l\xi_2) + \eta_1(\eta_1 + l\eta_2) + \omega_1(\omega_1 + l\omega_2) \} = \\ &= \frac{1}{k} \{ 1 + l \cos d \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2[M_1M] &= \frac{1}{k^2} \{ k^2 - 1 - 2l \cos d - l^2 \cos^2 d \} = \\ &= \frac{l^2}{k^2} \cdot \sin^2 d; \end{aligned}$$

подобно этому находим

$$\cos[MM_2] = \frac{1}{k} \{\cos d + l\};$$

$$\sin^2[MM_2] = \frac{1}{k^2} \cdot \sin^2 d;$$

отсюда

$$\frac{\sin^2[M_1M]}{\sin^2[MM_2]} = l^2,$$

и, наконец, определяем l :

$$l = \pm \frac{\sin[M_1M]}{\sin[MM_2]};$$

двойной знак вызывается тем обстоятельством, что оба синуса положительны, а параметр l может иметь любое вещественное значение.

Нетрудно убедиться, что положительные значения l дают один отрезок $[M_1M_2]$, а отрицательные — другой. Не входя в большие подробности, найдем середины этих отрезков; очевидно, должно быть

$$l = \pm 1,$$

а потому их координаты пропорциональны либо суммам, либо разностям координат данных точек.

В связи с изложенным, мы затронем вопрос о перпендикулярах, восстановленных в середине того или другого отрезка $[M_1M_2]$. Так как они являются геометрическим местом точек, равноудаленных от данных (см. 77), то, обозначая координаты какой-нибудь точки этой линии через (ξ, η, ω) , находим зависимость:

$$\xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \omega\omega_1 = \pm (\xi\xi_2 + \eta\eta_2 + \omega\omega_2), \quad (170)$$

причем необходимость двойного знака следует из того, что здесь идет речь о равенстве длин, а наши трехчлены могут иметь как положительные, так и отрицательные значения. Таким образом получаем уравнения обоих перпендикуляров:

$$(\xi_1 - \xi_2)\xi + (\eta_1 - \eta_2)\eta + (\omega_1 - \omega_2)\omega = 0$$

$$(\xi_1 + \xi_2)\xi + (\eta_1 + \eta_2)\eta + (\omega_1 + \omega_2)\omega = 0.$$

Первый перпендикуляр проходит через середину, определяемую суммой координат данных точек, а второй — через середину, определяемую разностью их; в самом деле, подставляя, имеем:

$$(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \omega_1^2) - (\xi_2^2 + \eta_2^2 + \omega_2^2) = 1 - 1 = 0, \text{ ч. и т. д.}$$

Докажем теперь, пользуясь полученными уравнениями, что перпендикуляры из середин сторон треугольника пересекаются в одной точке. Пусть дан треугольник $M_1M_2M_3$, где:

$$M_1(\xi_1, \eta_1, \omega_1); \quad M_2(\xi_2, \eta_2, \omega_2); \quad M_3(\xi_3, \eta_3, \omega_3).$$

Мы знаем, что в эллиптической геометрии эти три точки определяют четыре треугольника и что для полного определения одного из них достаточно задать две его стороны; но сторона вполне определится, если мы зададим ее середину. Итак, условимся иметь дело с тем треугольником $M_1M_2M_3$, у которого середины сторон $[M_1M_2]$ и $[M_1M_3]$ определяются с помощью разностей координат соответственных вершин; возникает вопрос, каким образом определяется середина на третьей стороне $[M_2M_3]$. Для его решения проведем прямую через середины двух первых сторон, и пусть она пересекает прямую M_2M_3 в точке:

$$\xi_2 + l\xi_3; \quad \eta_2 + l\eta_3; \quad \omega_2 + l\omega_3$$

(это, вообще говоря, однородные координаты); в силу постулата Паша, эта точка пересечения не может принадлежать стороне треугольника $[M_2M_3]$. Условие нахождения трех точек на одной прямой дает:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 - \xi_2, & \eta_1 - \eta_2, & \omega_1 - \omega_2 \\ \xi_2 + l\xi_3, & \eta_2 + l\eta_3, & \omega_2 + l\omega_3 \\ \xi_3 - \xi_1, & \eta_3 - \eta_1, & \omega_3 - \omega_1 \end{vmatrix} = 0;$$

очевидно, значение $l = -1$ удовлетворит этому уравнению (прибавим ко второй строке первую и третью) и будет единственным, ибо имеем дело с уравнением 1-ой

степени. Отсюда уже ясно, что точки стороны треугольника (M_2M_3) задаются положительными значениями параметра, и ее середина определяется суммой координат вершин M_2 и M_3 .

Вспоминая сказанное выше о перпендикулярах, восстановленных в серединах отрезков, получаем уравнения интересующих нас линий в следующем виде:

$$\begin{aligned}(\xi_1 + \xi_2)\xi + (\eta_1 + \eta_2)\eta + (\omega_1 + \omega_2)\omega &= 0 \\(\xi_2 - \xi_3)\xi + (\eta_2 - \eta_3)\eta + (\omega_2 - \omega_3)\omega &= 0 \\(\xi_3 + \xi_1)\xi + (\eta_3 + \eta_1)\eta + (\omega_3 + \omega_1)\omega &= 0;\end{aligned}$$

для того чтобы эти уравнения имели общее решение, отличное от нуля, необходимо и достаточно выполнение условия:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 + \xi_2 & \eta_1 + \eta_2 & \omega_1 + \omega_2 \\ \xi_2 - \xi_3 & \eta_2 - \eta_3 & \omega_2 - \omega_3 \\ \xi_3 + \xi_1 & \eta_3 + \eta_1 & \omega_3 + \omega_1 \end{vmatrix} = 0;$$

но указанное условие очевидно выполняется (из элементов второй строки вычтем соответственно элементы первой и прибавим элементы третьей).

Случаи других треугольников $M_1M_2M_3$ рассматриваются подобным же образом.

Для последнего примера выведем уравнение окружности с центром в точке $(\xi_0, \eta_0, \omega_0)$ и с радиусом $= r$; теорема 170 непосредственно дает

$$\xi_0\xi + \eta_0\eta + \omega_0\omega = \pm \cos r,$$

где двойной знак объясняется, тем что $\cos r$ всегда > 0 , а левая часть может иметь значения разных знаков. С целью избавиться от двойного знака, возвысим в квадрат и получим:

$$(\xi_0\xi + \eta_0\eta + \omega_0\omega)^2 = \cos^2 r;$$

т. е. окружность задается уравнением 2-ой степени; вводя в правую часть множитель

$$\xi^2 + \eta^2 + \omega^2 = 1,$$

его можно сделать однородным.

Вообще кривые 2-го порядка определяются однородными уравнениями 2-ой степени относительно координат Вейерштрасса. Так как бесконечно-удаленных точек нет, то все эти кривые будут „типа эллипса“.

За дальнейшим знакомством с аналитической геометрией риманова пространства мы отошлем читателя к следующим работам:

1) *Barbarin, Études de géométrie analytique non euclidienne* (Mém. couronnés de l'Académie R. Belgique, LX, 1900); цель автора — возможно полное изучение „естественной аналогии“ евклидова и неевклидова пространств.

2) *Coolidge. The Elements of Non-Euclidean Geometry* (Oxford 1909); автор тоже подчеркивает такие меровые свойства неевклидовых конических сечений, которые представляют тесную аналогию с соответствующими евклидовыми теоремами.

3) *Killing. Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung* (Leipzig 1885).

В интересах дальнейшего, нельзя обойти полным молчанием основы аналитической геометрий^{*} в пространстве; но подробное изложение соответственных вопросов из геометрии на плоскости дает нам право ограничиться здесь некоторыми краткими указаниями.

Возьмем автополярный тетраэдр $OXYZ$ (его можно получить, соединив вершины автополярного треугольника OXY с полюсом Z его плоскости); существует еще семь автополярных тетраэдров с теми же вершинами, которые вместе с данным выполняют пространство. Мы можем перенумеровать их подобно тому, как это было сделано выше для треугольников. Пусть теперь дана какая-нибудь точка M ; соединив ее с вершинами автополярного тетраэдра, остановимся на тех полупрямых:

$[ON]$, $[XP]$, $[YQ]$, $[ZR]$, которые содержат т. М. Отрезки $[OM]$, $[XM]$, $[YM]$, $[ZM]$ обозначаем соответственно через x_0 , x_1 , x_2 , x_3 , причем в выборе отрезков руководимся правилами, подобными тем, которые были даны для плоскости, а именно: $x_0 \leq \frac{\pi}{2}$; каждое из чисел x_1 , x_2 , x_3 для четырех тетраэдров $\leq \frac{\pi}{2}$, а для четырех других $\geq \frac{\pi}{2}$.

Определенные таким образом числа x_0 , x_1 , x_2 , x_3 называются прямоугольными координатами точки. Между ними имеет место основная зависимость:

$$\cos^2 x_0 + \cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 + \cos^2 x_3 = 1.$$

Координаты Вейерштрасса вводятся равенствами:

$$\xi = \cos x_1, \quad \eta = \cos x_2, \quad \zeta = \cos x_3, \quad \omega = \cos x_0;$$

из определения вытекает существование следующих условий:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \omega^2 = 1$$

$$\omega \geq 0;$$

$$\text{если } \omega = 0, \quad \text{то } \zeta \geq 0;$$

$$,, \quad \omega = \zeta = 0, \quad ,, \quad \eta \geq 0;$$

$$,, \quad \omega = \zeta = \eta = 0, \quad ,, \quad \xi > 0.$$

Затем вводим полярные координаты:

$$\rho = x_0;$$

$$\alpha = \text{углу между } [OX] \text{ и } [ON]$$

$$\beta = \text{,, ,, } [OY] \text{ и } [ON].$$

$$\gamma = \text{,, ,, } [OZ] \text{ и } [ON],$$

причем эти углы определяются так, что их отношение к прямому углу — одинаково с отношением чисел x_1 ,

x_2 , x_3 к $\frac{\pi}{2}$.

Между указанными углами имеет место соотношение:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$

а последние две координатные системы связаны зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \cos \rho \\ \xi &= \sin \rho \cos \alpha \\ \eta &= \sin \rho \cos \beta \\ \zeta &= \sin \rho \cos \gamma \end{aligned} \right\}$$

Наконец, можно и здесь ввести однородные координаты.

Один из отрезков d , определяемых двумя данными точками, определяется из равенства:

$$\cos d = \xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2 + \zeta_1 \zeta_2 + \omega_1 \omega_2;$$

отсюда уже ясно, что плоскость определяется однородным уравнением 1-ой степени, и т. д. Подробности можно найти в работах, указанных в конце предыдущего отдела.

Найдем, для примера, уравнение поверхности Клиффорда, у которой осью служит OZ и радиус $= r$. Берем на поверхности какую-нибудь точку M и опускаем перпендикуляр MK на прямую OZ ; угол KOM есть не что иное, как угол γ . Определив треугольник KOM по отрезкам:

$$[KM] = r \text{ и } [OM] = \rho,$$

найдем соотношение:

$$\sin r = \sin \rho \sin \gamma$$

(здесь все равно, будет ли $\angle KOM = \gamma$, или $(\pi - \gamma)$). Далее, из основного соотношения для вейерштрассовых координат имеем:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \sin^2 \rho,$$

откуда

$$\xi^2 + \eta^2 = \sin^2 \rho \cdot \sin^2 \gamma;$$

подставляя, находим искомое уравнение

$$\xi^2 + \eta^2 = \sin^2 r$$

Мы считаем нужным еще остановиться на вычислении длин дуг, площадей и объемов вообще.

Пусть параметрически задана линия:

$$\xi = f_1(t), \quad \eta = f_2(t), \quad \omega = f_3(t).$$

(в правой части стоят аналитические функции; ради простоты мы ограничиваемся плоскостью, но перенос в пространство труда не представляет); и пусть параметр t меняется от t_0 до T для точек дуги, подлежащей вычислению. По обычному способу мы вписываем в искомую дугу ломаную линию; пусть v_i — ее отрезок, определяемый точками:

$$(\xi_i, \eta_i, \omega_i) \text{ и } (\xi_i + \Delta\xi_i, \eta_i + \Delta\eta_i, \omega_i + \Delta\omega_i)$$

Тогда (170):

$$\begin{aligned} \cos v_i &= \xi_i (\xi_i + \Delta\xi_i) + \eta_i (\eta_i + \Delta\eta_i) + \omega_i (\omega_i + \Delta\omega_i) = \\ &= 1 + \xi_i \Delta\xi_i + \eta_i \Delta\eta_i + \omega_i \Delta\omega_i; \end{aligned}$$

с другой стороны

$$(\xi_i + \Delta\xi_i)^2 + (\eta_i + \Delta\eta_i)^2 + (\omega_i + \Delta\omega_i)^2 = 1,$$

откуда

$$\xi_i \Delta\xi_i + \eta_i \Delta\eta_i + \omega_i \Delta\omega_i = -\frac{1}{2} \left\{ (\Delta\xi_i)^2 + (\Delta\eta_i)^2 + (\Delta\omega_i)^2 \right\},$$

так что

$$\cos v_i = 1 - \frac{1}{2} \left\{ (\Delta\xi_i)^2 + (\Delta\eta_i)^2 + (\Delta\omega_i)^2 \right\}.$$

Простое преобразование этой формулы даст нам новую:

$$\sin \frac{v_i}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\Delta\xi_i)^2 + (\Delta\eta_i)^2 + (\Delta\omega_i)^2}.$$

Взяв сумму всех v_i , получим периметр ломаной; увеличивая беспрестанно число сторон ломаной, причем каждая из них неограниченно убывает, переходим к пределу (его существование будет сейчас обнаружено). Этот предел мы и называем длиной искомой дуги s . Итак

$$s = \lim \left(\sum_i v_i \right).$$

Принимая во внимание, что

$$\Delta \xi_i = \Delta t_i (f_1'(t_i) + \varepsilon_i) \text{ и т. д.,}$$

где ε_i — бесконечно мало вместе с Δt_i , и, вспоминая предложение об эквивалентности бесконечно малых v_i и $2 \sin \frac{v_i}{2}$, переходим к равенству:

$$\begin{aligned} s &= \lim \left\{ \sum_i \sqrt{[f_1'(t_i)]^2 + [f_2'(t_i)]^2 + [f_3'(t_i)]^2} \Delta t_i (1 + \alpha_i) \right\} = \\ &= \lim \left\{ \sum_i \sqrt{[f_1'(t_i)]^2 + [f_2'(t_i)]^2 + [f_3'(t_i)]^2} \Delta t_i \right\} + \\ &+ \lim \left\{ \sum_i \sqrt{[f_1'(t_i)]^2 + [f_2'(t_i)]^2 + [f_3'(t_i)]^2} \alpha_i \Delta t_i \right\}, \end{aligned}$$

где α_i — бесконечно малы вместе с Δt_i .

Как известно, последний предел $= 0$, а первый равен определенному интегралу

$$s = \int_{t_0}^T \sqrt{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2} \cdot dt,$$

откуда и получаем дифференциал дуги в вейерштрассовых координатах

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\omega^2.$$

Переходя к полярным координатам, имеем [169]:

$$ds^2 = d\rho^2 + \sin^2 \rho \cdot d\alpha^2.$$

В частности для окружности, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = r$, отсюда находим:

$$ds = \sin r \cdot d\alpha,$$

что приводит к тому же самому выражению для длины окружности, которое было дано в теореме 161.

Переход в пространство дает нам общие формулы: в координатах Вейерштрасса:

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 + d\omega^2;$$

в полярных координатах:

$$ds^2 = d\rho^2 + \sin^2 \rho \{ \sin^2 \alpha \, d\lambda^2 + \sin^2 \beta \, d\beta^2 + \sin^2 \gamma \, d\gamma^2 \}.$$

Изложение дифференциальной геометрии в неевклидовом пространстве можно найти, например, в указанных выше работах Кулиджа и Барбарэна. Тесная аналогия с выводами евклидовой геометрии заставила Киллинга высказать такое утверждение: „Дифференциальную геометрию в более узком смысле можно непосредственно перенести в неевклидовы пространственные формы“^{*)}.

Эти соображения подсказывают тот путь, следуя которому, можно дать общее определение площадей и объемов; именно, мы кладем в основу следующее положение Лобачевского [высказанное им в „Géométrie imaginaire“]:

„Les valeurs des éléments différentiels des lignes courbes, des surfaces et du volume des corps sont les mêmes dans la géométrie imaginaire et dans la géométrie usitée“.

Основываясь на изложенном, мы введем следующие определения. Начинаем с площади некоторой поверхности, заданной параметрически при помощи параметров u и v ; пусть для нее дифференциал дуги приведен к виду:

$$ds^2 = E \cdot du^2 + 2F \cdot du \cdot dv + G \cdot dv^2.$$

Определение 52. Элементом площади на данной поверхности называется выражение

$$dQ = \sqrt{EG - F^2} \cdot du \cdot dv.$$

Площадью конечной части поверхности называется

$$\iint dQ,$$

взятый по соответствующей области (если таковой интеграл вообще существует).

^{*)} См. его отчет о книге Кулиджа, напечатанный в „Шестом присуждении премии имени Н. И. Лобачевского“ (Казань, 1914) стр. 9.

Установим прежде всего, что это общее определение согласуется с ранее данным определением площадей треугольника и круга; для проверки выберем последнюю. Так как на плоскости имеем

$$ds^2 = d\rho^2 - \sin^2 \rho \, d\alpha^2,$$

то здесь

$$E = \sin^2 \rho, \quad F = 0, \quad G = 1;$$

а потому для плоской фигуры находим:

$$dQ = \sin \rho \, d\rho \, d\alpha.$$

Тогда площадь круга выражается следующим двойным интегралом:

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^r \sin \rho \, d\rho = 2\pi (1 - \cos r),$$

ч. и т. д.

Для другого примера вычислим поверхность шара. Пусть последняя задана уравнением

$$\rho = r;$$

тогда дифференциал дуги равен

$$ds^2 = \sin^2 r (\sin^2 \alpha \, d\alpha^2 + \sin^2 \beta \, d\beta^2 + \sin^2 \gamma \, d\gamma^2).$$

Но из основного соотношения между углами получаем

$$\sin \gamma \, d\gamma = - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \gamma} d\alpha - \frac{\sin \beta \cos \beta}{\cos \gamma} d\beta;$$

подставляя, приводим дифференциал дуги к виду

$$ds^2 = E d\alpha^2 + 2F d\alpha d\beta + G d\beta^2,$$

где

$$E = G = \sin^2 r \frac{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\cos^2 \gamma}$$

$$F = \sin^2 r \frac{\sin \alpha \cos \alpha \sin \beta \cos \beta}{\cos^2 \gamma}.$$

*) „Дифференциальные элементы кривых линий, поверхностей и объема тел имеют в воображаемой геометрии те же самые значения, как и в геометрии обычной“.

Теперь определение 52 дает нам элемент площади:

$$dQ = \sin^2 r \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}} d\alpha d\beta.$$

Приступая к вычислению поверхности шара, ограничимся автополярным тетраэдром I, который даст $\frac{1}{8}$ искомого числа; при данном α , ппр. $[ON]$ описывает поверхность конуса, так что β меняется в границах от $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ до $\frac{\pi}{2}$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} Q &= 8 \sin^2 r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha d\alpha \int_{\frac{\pi}{2} - \alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin \beta d\beta}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta}} \\ &= 8 \sin^2 r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\arccos \left(\frac{\cos \beta}{\sin \alpha} \right) \right]_{\frac{\pi}{2} - \alpha}^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha d\alpha \\ &= 4 \pi \sin^2 r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \alpha d\alpha = 4 \pi \sin^2 r. \end{aligned}$$

Укажем еще (без вывода), что площадь всей поверхности Клиффорда равна $\pi^2 \sin 2r$.

Переходим к вычислению объемов.

Для определения элемента объема поступаем следующим образом. Проведем две плоскости, перпендикулярные к OZ и отстоящие друг от друга по оси OZ на расстояние $= dz$; в одной из них (обыкновенно в более удаленной от плоскости YOX) берем элемент площади в полярных координатах, так что координаты одной из вершин полученного криволинейного 4-угольника будут (ρ, α) . Из вершин этого 4-угольника опускаем перпендикуляры на другую плоскость, и пусть h — длина перпендикуляра, опущенного из точки (ρ, α) . Руководясь „началом Лобачевского“, вводим следующее определение:

Определение 53. Элементом объема называется выражение

$$dV = dQ h;$$

объемом конечной части пространства называется

$$\int \int \int dV$$

взятый по соответственной области (если таковой интеграл вообще существует).

Нам уже известно, что:

$$dQ = \sin \rho \, d\rho \, d\alpha;$$

с другой стороны, теорема 158 дает

$$\sin h = \sin (dz) \cos \rho.$$

Заменяя одни бесконечно малые другими, им эквивалентными, приходим к заключению, что

$$dV = \sin \rho \cos \rho \, d\rho \, d\alpha \, dz.$$

Производя соответствующие интегрирования, найдем, что объем шара равен:

$$\pi (2r - \sin 2r);$$

и объем цилиндра, ограниченного поверхностью Клиффорда, равен

$$\pi^2 \sin^2 r.$$

В книге Кулиджа имеется вывод объема тетраэдра; несмотря на то, что автор упрощает задачу, выбирая тетраэдр особого вида, получается интеграл, вообще не берущийся в конечном виде. Дело значительно упрощается для автополярного тетраэдра, и на этом случае мы остановимся, именно найдем объем тетраэдра $OXYZ$. В какой-нибудь точке M полупрямой $[OZ]$ проведем плоскость, перпендикулярную к OZ ; на основании теоремы 104 эта плоскость пройдет через ребро $[XY]$, так что в сечении получится автополярный треугольник MXY .

Теперь определение 53 дает

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dz \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \rho \cos \rho \, d\rho,$$

откуда

$$V = \frac{\pi^2}{8}.$$

В заключение можно поставить вопрос об объеме всего эллиптического пространства; так как оно складывается из 8 автополярных тетраэдров, то мы должны приписать ему объем, равный π^2 . (Надо помнить, что все эти формулы имеют место при определенном выборе единиц измерения, который был сделан выше.)

ХII. СМЫСЛ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБРАЗОВ.

Для характеристики различного расположения геометрических образов мы употребляем термин „смысл“; другие термины, как например, „направление“, „направление пробега“ и т. п., удобны в одних случаях (для прямой или окружности), но неудобны в других (например по отношению к тетраэдру).

Различение смысла или направления в расположении точек прямолинейного ряда очевидно предполагает известное асимметричное отношение между его элементами; между тем в основу учения о расположении было положено отношение „разделение пар точек“:

$$AB \mid CD,$$

которое симметрично как относительно обеих пар, так и относительно точек каждой пары. Следовательно, в настоящей главе придется перейти к другому отношению, обладающему нужными свойствами.

Как известно, Рассель *) приходит к выводу, что в основе расположения элементов какого-либо ряда лежит известное асимметричное и транзитивное отношение. Всякое такое отношение имеет два „смысла“, причем последнее понятие (а именно „смысл отношения“) мы относим к числу основных понятий. Обозначим указанное асимметричное отношение через P , а обратное ему — через $\bar{P}$; тогда отношение P к $\bar{P}$ Рассель и определяет как раз-

*) Russell. The Principles of Mathematics (Cambridge 1903). Part IV (Order); особенно сюда относятся следующие страницы: 214—217, 227—228, 231—232.

личие смысла. Что касается так называемых закрытых рядов, к числу которых принадлежит прямая римановой геометрии, то исследования Ресселя нашли существенную опору в работах Вайля и Падоя *). Идеи всех названных авторов послужили нам исходной точкой в исследовании смысла прямой и отрезка.

Покончив со смыслом образов одного протяжения, мы переходим к развитию соответствующего понятия для треугольников и тетраэдров и в последующих главах постараемся извлечь отсюда интересные следствия.

Отношение „разделение пар“ привело к понятию отрезка, и мы воспользуемся обоими понятиями, чтобы наиболее простым образом построить искомое асимметричное отношение. В случае закрытого ряда оно необходимо связано с выбором трех его элементов.

Итак, возьмем на прямой три точки A, B, C , которые условимся называть основными. Пусть M есть какая-нибудь точка нашей прямой, отличная от основных; на основании теоремы 14, имеем:

или $AB \mid CM$, или $AM \mid BC$, или $AC \mid BM$;

другими словами: M принадлежит или $[AB]_C$, или $[BC]_A$ или $[CA]_B$.

Таким образом мы убеждаемся, что три выбранные точки делят данную прямую на три отрезка, которые тоже условимся называть основными.

Отрезки $[AB]_C$ и $[BA]_C$, как совокупности точек, тождественны; но в настоящей главе между ними будет сделано различие. Поэтому условимся основные отрезки, соответствующие основным точкам A, B, C , всегда выписывать следующим образом:

$[AB]_C, [BC]_A, [CA]_B$.

*) См. их статьи в томах V и VI журнала „Rivista di Matematica“.

Этим отрезкам приписываем номера: 1-ый, 2-ой, 3-ий; точка стоящая в скобках на первом месте, называется началом отрезка, а на втором — его концом.

Определение 54. Формула

$$Y S_{ABC} X$$

равносильна утверждению: или Y принадлежит основному отрезку с № i , а X — отрезку с № k , где $i > k$; или Y и X принадлежат одному и тому же отрезку, причем либо Y совпадает с его концом (но только не с точкой A), либо X — с его началом, либо и то и другое вместе; а если обе точки внутренние, то имеет место разделение

$$UY \mid VX,$$

где U — начало, V — конец упомянутого отрезка.

Здесь мы имеем определение отношения

$$S_{ABC}.$$

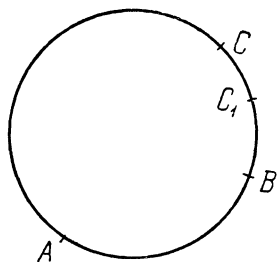
Легко видеть, что точка A занимает исключительное положение: она никогда не может быть предшествующим членом указанного отношения, но для всякой другой точки может служить последующим членом, так что всегда имеем

$$MS_{ABC} A.$$

Для того чтобы наглядно представить себе свойства отношения S_{ABC} , можно воспользоваться какой-нибудь замкнутой линией (например окружностью), отметить на ней три т. A, B, C (черт. 40) и понимать формулу $Y S_{ABC} X$ так: „ Y следует за X в направлении ABC “.

Изучим теперь важнейшие свойства отношения S_{ABC} .

177. Отношение S_{ABC} асимметрично, транзитивно, связано и слитно (объяснение этих терминов см. ниже).



Черт. 40.

Разберем эти свойства по порядку:

1) Из определения 54 непосредственно вытекает, что утверждения $YS_{ABC}X$ и $XS_{ABC}Y$ несовместны друг с другом; в этом и заключается асимметричность отношения (иначе: отсутствие взаимности).

2) Транзитивность отношения (иначе: его переносимость) выражается формулой:

$$YS_{ABC}X \cdot XS_{ABC}Z : \circ \cdot YS_{ABC}Z.$$

Если Y и X принадлежат различным основным отрезкам, то это утверждение вытекает из первого случая определения 54; на том же основании оправдывается оно и тогда, когда точки Y и X принадлежат одному и тому же отрезку, а Z — другому. Пусть теперь все три точки принадлежат одному и тому же отрезку $[UV]$ из числа основных; если Y совпадает с V , или Z — с U , то теорема очевидна, так что остается рассмотреть случай, когда все три точки являются внутренними для отрезка $[UV]$. Тогда, на основании определения 54, имеем

$$UY \mid VX \text{ и } UX \mid VZ;$$

но

$$XV \mid UY \cdot XU \mid VZ : \circ \cdot UY \mid VZ,$$

откуда следует (опр. 54):

$$YS_{ABC}Z, \text{ ч. и т. д.}$$

3) Связность отношения выражается в том, что для двух любых различных точек Y и X данной прямой имеем:

$$\text{либо } YS_{ABC}X, \text{ либо } XS_{ABC}Y.$$

Утверждение это без труда выводится из определения 54. в котором разобраны всевозможные случаи.

4) Слитность отношения заключается в том, что если дано

$$YS_{ABC}X,$$

то существует такая точка Z , которая удовлетворяет условиям

$$YS_{ABC}Z \cdot ZS_{ABC}X.$$

Действительно, если точки X и Y принадлежат различным основным отрезкам, то роль точки Z может сыграть одна из точек B и C ; если же X и Y принадлежат одному и тому же отрезку $[UV]_W$, то достаточно Z взять внутри отрезка $[XY]_W$. В дальнейшие подробности, ради сокращения, не входим.

На ряду с отношением S_{ABC} нам придется иметь дело с обратным отношением

$$\check{S}_{ABC};$$

утверждение взаимной обратности этих двух отношений сводится к формуле:

$$XS_{ABC}Y \cdot \equiv \cdot Y\check{S}_{ABC}X.$$

Нетрудно убедиться, что указанные четыре свойства первого отношения присущи и $\check{S}_{ABC}$.

Исключительное положение точки A было уже отмечено; его выражают словами, что т. A есть конец ряда, порождаемого отношением S_{ABC} , или начало ряда, порождаемого обратным отношением $\check{S}_{ABC}$. Но за точку A можно взять любую точку данной прямой; в этом — отличие закрытого ряда от открытого: в последнем или совсем нет конца (начала), или имеется одна вполне определенная точка, обладающая этим свойством.

Два отношения P и Q называются равносильными, если для любых возможных значений X и Y имеем:

$$XPY \cdot \equiv \cdot XQY.$$

178. Если $C_1S_{ABC}B$, то отношения S_{ABC} и S_{ABC_1} — равносильны.

Доказательство теоремы труда не представляет, но в полном виде — довольно громоздко, так как прихо-

дится различать ряд случаев. Мы считаем возможным ограничиться разбором только некоторых из них; рассуждение можно сделать наглядным с помощью черт. 40.

Прежде всего т. C_1 , отличная от C , должна принадлежать, в силу условий теоремы, или отрезку $[BC]_A$ или отрезку $[CA]_B$; остановимся на первом допущении. Пусть, кроме того, дана формула

$$YS_{ABC}X.$$

Сопоставим прежде всего новые основные отрезки с прежними; так как данное нам разделение

$$BC \mid AC_1$$

исключает возможность $AB \mid CC_1$ (акс. VI), то отрезки $[AB]_C$ и $[AB]_{C_1}$ тождественны.

Далее, отрезок $[BC]_A$ теперь разбивается на два:

$$[BC_1]_A \text{ и } [C_1C]_A,$$

причем последний из них тождествен с отрезком $[C_1C]_B$. Отсюда видно, что новый третий отрезок составлен из двух таких:

$$[C_1C]_B \text{ и } [CA]_B.$$

Допустим теперь, что т. X принадлежит отрезку $[AB]_C$; так как первые основные отрезки в обоих случаях тождественны, то, где бы ни лежала т. Y , из определения 54 сейчас же явствует, что

$$YS_{ABC}X \cdot c \cdot YS_{ABC_1}X.$$

Остановимся еще на допущении, что X и Y обе принадлежат отрезку $[BC_1]_A$; поэтому и согласно определению 54 должно быть

$$BC_1 \mid YA \text{ и } BY \mid CX.$$

Имеющиеся у нас разделения сочетаем следующим образом:

$$\begin{aligned} C_1B \mid AY \cdot C_1A \mid BC : \circ \cdot C_1B \mid YC \\ YB \mid CX \cdot YC \mid EC_1 : \circ \cdot YB \mid XC_1, \end{aligned} \quad (5)$$

а отсюда вытекает (опр. 54)

$$YS_{ABC_1}X.$$

Подобные рассуждения во всех случаях приводят к выводу:

$$YS_{ABC}X \cdot \circ \cdot YS_{ABC_1}X$$

при условии, что имеет место

$$C_1S_{ABC}B.$$

Из определения 54 между прочим вытекает, что

$$C_1S_{ABC}B \cdot \equiv \cdot CS_{ABC_1}B;$$

так что, перемещая буквы C и C_1 в предыдущем рассуждении, приходим к заключению

$$YS_{ABC_1}X \cdot \circ \cdot YS_{ABC}X;$$

соединяя обе формулы, имеем

$$S_{ABC} \equiv S_{ABC_1},$$

ч. и т. д.

179. Если Y и X отличны от A , то:

$$YS_{ACB}X \cdot \equiv \cdot XS_{ABC}Y.$$

Действительно, добавочное условие необходимо, так как точка A может быть только последующим членом обоих отношений. Выпишем их основные отрезки:

$$\text{для } S_{ABC}: [AB]_C, [BC]_A, [CA]_B;$$

$$\text{для } S_{ACB}: [AC]_B, [CB]_A, [BA]_C;$$

мы видим, что они расположены в обратном порядке и что в каждом отрезке начало и конец поменялись местами (сохранилось лишь особое положение точки A , которая здесь исключена). Затем остается лишь сослаться на определение 54.

180. Если $CS_{ABC}B_1$ и точка B_1 отлична от A , то:

$$S_{ABC} \equiv S_{AB_1C}.$$

В самом деле, если нам дана формула

$$YS_{ABC}X$$

и точка X отлична от A , то и Y отлична от A ; тогда можно написать (179)

$$YS_{ABC} X \cdot \equiv \cdot XS_{ACB} Y$$

$$CS_{ABC} B_1 \cdot \equiv \cdot B_1 S_{ACB} C.$$

Применяя теорему 178, имеем:

$$XS_{ACB} Y \cdot \equiv \cdot XS_{ACB_1} Y,$$

а теорема 179 снова дает:

$$YS_{ABC} X \cdot \equiv \cdot YS_{AB_1C} X.$$

Если же т. X совпадает с A , то оба утверждения

$$YS_{ABC} A \text{ и } YS_{AB_1C} A$$

всегда имеют место, что и доказывает теорему.

181. Если $C_1 S_{ABC} B_1$ и точка B_1 отлична от A , то:

$$S_{ABC} \equiv S_{AB_1C_1}.$$

Можно считать, что C_1 отлично от C и B_1 от B ; в таком случае должно быть (177, п. 3):

$$\text{либо } B_1 S_{ABC} B, \text{ либо } BS_{ABC} B_1;$$

рассмотрим оба случая отдельно.

В первом имеем (177, п. 2):

$$C_1 S_{ABC} B_1 \cdot B_1 S_{ABC} B : \cdot C_1 S_{ABC} B,$$

а потому (178)

$$S_{ABC} \equiv S_{ABC_1};$$

в частности, получим

$$C_1 S_{ABC} B_1 \cdot \equiv \cdot C_1 S_{ABC_1} B_1;$$

тогда теорема 180 дает

$$S_{ABC_1} \equiv S_{AB_1C_1},$$

так что окончательно

$$S_{ABC} \equiv S_{AB_1C_1}.$$

Второй случай рассматривается подобным же образом (только теоремы 178 и 180 применяются в обратном порядке).

182. Если произвести круговую перестановку в размещении основных точек, то в случае когда X принадлежит отрезку $[AB]_C$, а Y ему не принадлежит, имеем:

$$YS_{ABC}X \equiv \cdot XS_{BCA}Y;$$

в остальных же случаях существует соротношение

$$YS_{ABC}X \equiv \cdot YS_{BCA}X.$$

Для доказательства выпишем основные отрезки обоих отношений:

$$\text{для } S_{ABC}: [AB]_C, [BC]_A, [CA]_B;$$

$$\text{для } S_{BCA}: [BC]_A, [CA]_B, [AB]_C;$$

Теперь остается лишь вспомнить определение 54.

Теорема остается верной и при замене S_{ABC} , на $\tilde{S}_{ABC}$, так как от последнего можно перейти к первому, переставляя члены отношения.

Таким образом отношения S_{ABC} и S_{BCA} имеют нечто общее, что здесь важно подчеркнуть; именно при круговой перестановке основных точек расположение точек в каждом из основных отрезков не нарушается, а сами основные отрезки претерпевают круговую перестановку. Имея в виду замкнутость римановой прямой, вводим нижеследующие определения. Пусть на прямой выделены основные точки A, B, C ; тогда в общем получается шесть различных отношений с указанными основными точками, и мы разбиваем их на две группы:

$$S_{ABC}, S_{BCA}, S_{CAB} \\ S_{ACB}, S_{CBA}, S_{BAC}.$$

Легко видеть, что отношения одной и той же группы получаются друг из друга с помощью круговых перестановок основных точек (другими словами — с помощью четного числа перемещений по две точки); для перехода же к отношению другой группы необходимо применить одно (или вообще нечетное число) перемещений. Говоря

в дальнейшем об отношениях одной и той же или различных групп, всегда будем иметь в виду вышеуказанное деление. Для отношения типа $\tilde{S}_{ABC}$ делаются подобные же обозначения и условия.

Определение 55. Два отношения рассматриваемого типа называются сонаправленными, если одно получается из другого путем конечного числа переходов к отношениям той же группы и к отношениям равносильным, причем сюда могут присоединяться переходы в другую группу и переходы от S к $\tilde{S}$ при условии, что число двух последних операций будет в общем четное.

Два отношения называются разнонаправленными, если число, упомянутое в конце предыдущего определения, будет нечетным.

183. 1) Два отношения, сонаправленные с третьим, сонаправлены между собой.

1) Если одно отношение сонаправлено с третьим, а другое — разнонаправлено с ним, то данные отношения разнонаправлены.

3) Два отношения, разнонаправленные с третьим, сонаправлены между собой.

Для доказательства перейдем от первого отношения ко второму через посредство третьего; определение 55 тогда оправдывает все три утверждения.

Необходимым дополнением является следующая теорема:

184. Два отношения не могут быть одновременно и сонаправленными и разнонаправленными.

Если бы это было возможно, то оказалось бы, что отношение может быть разнонаправленным с самим собою; в опровержении этого предположения и заключается доказательство. Допустим, что мы совершенно произвольным образом перешли от отношения S_{ABC} к этому же самому отношению. Так как число отдельных переходов,

о которых говорится в определении 55, во всяком случае конечное, то и число точек данной прямой, которые при этих переходах являются в качестве основных, тоже конечное; следовательно, на данной прямой можно будет найти такие две точки X и Y , что в одном из отрезков $[XY]$ не будет находиться ни одной из упомянутых основных точек, и притом точки X , Y будут отличны от всех этих точек. Допустим для определенности, что имеет место зависимость $YS_{ABC}X$, и рассмотрим, при каких отдельных переходах точки X и Y будут меняться местами, т. е. X будет становиться предшествующим, а Y — последующим членом нового отношения. При переходе к отношениям той же группы (при сохранении основных точек), этого перемещения не произойдет, как то удостоверяет теорема 182; совершенно ясно, что такое же заключение будет сделано относительно переходов к отношениям равносильным. Но при переходе от S к $\bar{S}$ и обратно несомненно точки X и Y меняются местами; и то же самое произойдет при переходе к отношению другой группы. В самом деле, один относящийся сюда случай указан в теореме 179; а другие сводятся к нему при помощи теоремы 182. Но в конце концов мы придем к той же самой формуле:

$$YS_{ABC}X;$$

а это показывает, что число, о котором говорится в определении 55, будет всегда четным, откуда и следует теорема.

185. Если $C_1S_{ABC}B_1$ и $B_1S_{ABC}A_1$, то отношения: S_{ABC} и $S_{A_1B_1C_1}$ — сонаправлены.

Действительно, на основании теоремы 181:

$$S_{ABC} \equiv S_{AB_1C_1};$$

в частности имеем

$$B_1S_{ABC}A_1 \equiv B_1S_{AB_1C_1}A_1;$$

а последнее возможно лишь тогда, когда т. A_1 принад-

лежит отрезку $[AB_1]_{C_1}$ (опр. 54); но в таком случае, в силу того же определения, имеем:

$$A_1 S_{B_1 C_1 A} C_1,$$

и теорема 178 дает:

$$S_{B_1 C_1 A} \equiv S_{B_1 C_1 A_1}.$$

Теперь от отношения S_{ABC} можно перейти к отношению $S_{A_1 B_1 C_1}$ следующим образом:

$$S_{ABC} \cdots S_{AB_1 C_1} \cdots S_{B_1 C_1 A} \cdots S_{B_1 C_1 A_1} \cdots S_{A_1 B_1 C_1},$$

и определение 55 свидетельствует об их сонаправленности.

186. Если A, B, C и K, L, M суть две тройки различных точек, принадлежащих одной и той же прямой, то отношения: S_{ABC} и S_{KLM} — сравнимы, т. е. либо сонаправлены, либо разнонаправлены (одно или оба отношения можно заменить на обратные).

На основании связности и транзитивности отношения S_{ABC} точки K, L, M можно расположить в таком порядке, что каждая предыдущая стоит к каждой из последующих в отношении S_{ABC} ; пусть $K_0 L_0 M_0$ дает такое именно расположение точек (K_0, L_0, M_0 — тождественны с K, L, M в некотором определенном порядке). На основании теоремы 185: S_{ABC} и $S_{M_0 L_0 K_0}$ — сонаправлены; для дальнейшего остается только сослаться на определение 55 и теорему 183.

Теперь уже все готово для введения понятия о смысле прямой и отрезка.

Определение 56. Пусть на данной прямой отмечены три различные точки A, B, C ; тогда смыслом ABC этой прямой называется смысл отношения S_{ABC} . Далее, условимся смыслы прямой, порождаемые сонаправленными отношениями, считать одинаковыми, а порождаемые разнонаправленными отношениями считать обратными.

Из теоремы 186 сейчас же следует, что смыслы ABC и KLM одной и той же прямой всегда сравнимы. Вообще различные теоремы о смысле прямой без труда вытекают из свойств отношений S_{ABC} и $\bar{S}_{ABC}$, так что мы на них не будем останавливаться.

Определение 57. Условимся в отрезке

$$[KL]_M$$

точку, стоящую на первом месте, называть началом а стоящую на втором — концом отрезка. Пусть на прямой KL указан смысл ABC ; всегда можно считать, что т. A не принадлежит к числу точек данного отрезка (иначе перейдем к сонаправленному отношению). Если имеет место отношение:

$$LS_{ABC} K,$$

то под смыслом данного отрезка понимается смысл ABC данной прямой; если же

$$KS_{ABC} L,$$

то под смыслом отрезка понимается смысл, обратный тому, который был приписан прямой KL .

Таким образом отрезки $[KL]_M$ и $[LK]_M$ имеют обратные смыслы; отсюда можно перейти к различию между положительными и отрицательными отрезками.

187. Два взаимно-дополнительных отрезка, у которых за начало и конец приняты те же самые точки, имеют обратные смыслы.

Пусть $KL|MN$ и речь идет об отрезках:

$$[KL]_M \text{ и } [KL]_N.$$

Первый отрезок содержит точку N и его смысл можно определить как смысл MKN данной прямой. Действительно, в данном случае L принадлежит отрезку $[NM]_K$, а потому (опр. 54):

$$LS_{MKN} K,$$

и определение 57 оправдывает наше утверждение. Точно также смысл отрезка $[KL]_N$, содержащего точку M , есть смысл NKM той же прямой. Далее:

смысл MKN одинаков со смыслом KNM

„ NKM „ „ „ KMN ,

ибо соответствующие отношения, как принадлежащие одной группе, сонаправлены (см. опр. 56).

Наконец,

смыслы KNM и KMN — обратны,

так как соответствующие отношения — разнонаправлены. Остается сослаться на теорему 183 (в связи с опр. 56) и теорема доказана.

188. Если t . P лежит внутри отрезка $[KL]_M$, то отрезки

$$[KL]_M \text{ и } [KP]_M$$

имеют одинаковый смысл.

Подобно предыдущему убедимся, что смыслы обоих отрезков можно определить как смысл MKP данной прямой. Таким образом все существенное в вопросе о смысле отрезка уже изложено.

Учение о смысле прямой может быть перенесено на пучок прямых в силу одно-однозначного соответствия между их элементами; не останавливаясь на этом вопросе, перейдем к смыслу треугольника. Предварительно выясним одно вспомогательное утверждение.

Если внутри одного и того же отрезка $[KL]$ даны две различные точки M_1 и M_2 , то смыслы KM_1L и KM_2L на прямой KL будут одинаковы. Действительно, определение 54 говорит, что

$$LS_{KM_1L} M_2;$$

но тогда (181)

$$S_{KM_1L} \equiv S_{KM_2L},$$

откуда и следует наше утверждение.

Определение 58. Под смыслом треугольника понимается определенное сочетание смыслов на прямых его сторон; именно под смыслом KLM треугольника KLM понимается нижеследующее.

Возьмем внутри сторон треугольника

$$[KL], [LM], [MK]$$

соответственно по внутренней точке:

$$M_1, K_1, L_1;$$

тогда смысл KLM является сочетанием следующих смыслов на прямых сторон треугольника:

$$KM_1L, LK_1M, ML_1K.$$

Подобным же образом определяются и другие смыслы (например LMK , KML и т. д.) того же треугольника.

Легко видеть, что различных символов для смысла треугольника KLM имеется всего шесть, которые мы разобьем на две группы:

$$KLM, LMK, MKL \quad (I)$$

$$KML, MLK, LKM; \quad (II)$$

основание для деления — непосредственно ясно. Далее, нетрудно убедиться, что смыслы одной и той же группы представляют сочетания одних и тех же смыслов на соответствующих прямых; а смыслы различных групп представляют сочетания обратных смыслов на каждой из трех прямых. В подтверждение последнего утверждения сравним первые смыслы в обеих группах. Смысл KLM был уже определен выше; для получения KML , согласно Определению 58, берем в отрезках

$$[KM], [ML], [LK]$$

по внутренней точке

$$L_1, K_1, M_1;$$

тогда KML является сочетанием следующих смыслов:

$$KL_1M, MK_1L, LM_1K.$$

Сравнивая эти размещения с теми, которые получились при определении KLM , видим, что последние выводятся из первых каждое с помощью одного перемещения двух крайних букв. Тогда соответственные отношения будут разнонаправленными (опр. 55), а смыслы — обратными, ч. и т. д.

Перед нами стоит теперь задача о сравнении смыслов как у одного и того же треугольника, так и у двух различных треугольников; для этого потребуются дополнительные условия. Мы введем их, руководствуясь интуитивными представлениями о смысле треугольника (о том направлении, в котором мы описываем его обвод), а затем подвергнем эти условия логическому анализу. При этом имеет место замечательное обстоятельство, что в эллиптической плоскости указанная попытка сравнивать смыслы у различных треугольников оказывается неосуществимой; но она вполне осуществима в эллиптическом пространстве для сравнения смыслов тетраэдров. Итак, обращаемся к упомянутым условиям.

Условие 1. Смыслы треугольника KLM , принадлежащие одной и той же группе, считаются одинаковыми, а принадлежащие различным группам — обратными (деление на группы см. выше).

Условие 2. Если треугольник $K'LM$ целиком принадлежит треугольнику KLM , то их смыслы $K'LM$ и KLM считаются одинаковыми.

Условие 3. Если смыслы двух треугольников оба одинаковы, или оба обратны со смыслом третьего треугольника, то эти смыслы считаются одинаковыми; если же смысл одного одинаков, а другого обратен со смыслом третьего треугольника, то эти смыслы считаются обратными.

Теперь необходимо исследовать вопрос о совместности этих трех условий.

Прежде всего докажем, что смыслы KLM двух тре-

угольников KLM , дополняющих друг друга до одного из углов, должны в силу сделанных условий быть обратными. Действительно, возьмем два треугольника KLM , дополняющие друг друга до угла K (черт. 41). Руководясь теоремой 31, построим треугольник $K'LM$, являющийся частью одного из данных треугольников. На основании условия 2, смысл $K'LM$ одинаков со смыслом KLM этого треугольника. Построим далее треугольник $K'MK$, состоящий из треугольников $K'LM$ и другого треугольника KLM (это — действие, обратное трансверсальному разложению); опять-таки условие 2 дает:

смысл KLM одинаков со смыслом $KK'M$

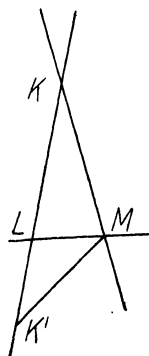
„ $K'LM$ „ „ „ $K'KM$.

Теперь условие 1 показывает, что:

смыслы $KK'M$ и $K'KM$ — обратны,

и повторное применение условия 3 доказывает теорему.

Итак, у двух треугольников KLM , дополняющих друг друга до угла K , смыслы KLM обратны; точно также у двух треугольников KLM , дополняющих друг друга до угла L , смыслы KLM — обратны. Следовательно, в силу условия 3 смыслы KLM этих двух новых треугольников должны быть одинаковыми. Но если читатель посмотрит на таблицу, приведенную в теореме 28, то сейчас же убедится, что эти два последние треугольника дополняют друг друга до угла M (который будет взаимно-дополнительным с углом M первоначально данного треугольника KLM); по доказанному выше, смыслы KLM таких треугольников должны быть обратными. Таким образом, получается противоречие; именно, условие 3 позволяет отсюда заключить, что смысл KLM в треугольнике KLM обратен самому себе, а это несовместимо с условием 1. Изложенные соображения приводят к выводу:



Черт. 41.

Сравнение смыслов у различных треугольников, подчиняющееся условиям 1—3, оказывается в эллиптической плоскости невозможным.

Полное значение этого вывода выяснится в одной из следующих глав (для одного и того же треугольника сравнение смыслов возможно).

Обращаемся к смыслу тетраэдра.

Определение 59. Под смыслом тетраэдра понимается определенное сочетание смыслов его граней; именно, смысл $AECD$ тетраэдра $ABCD$ является сочетанием следующих смыслов треугольников, служащих его гранями:

$BCD, ACB, ADC, ABD.$

Заметим, что каждое ребро в двух смежных гранях получает обратные смыслы.

Условие I. Два смысла одного и того же тетраэдра $ABCD$ считаются одинаковыми или обратными, смотря по тому, приводят ли они на каждой грани к одному и тому же смыслу, или к взаимно-обратным смыслам.

Сравнение смыслов одного и того же треугольника делается на основании условия 1; легко видеть, что его можно провести, не впадая в противоречие*).

189. Если $KLMN$ представляет собою какое-либо размещение букв A, B, C, D , то все размещения одного и того же класса представляют одинаковые смыслы, а размещения различных классов — обратные смыслы.

В справедливости теоремы убеждаемся, перебирая различные случаи и руководясь определением 59 и условием I. Эта теорема выражает сущность условия I.

Условие II. Если тетраэдр $A'BCD$ целиком принадлежит тетраэдру $ABCD$, то смыслы $A'BCD$ и $ABCD$ этих тетраэдров считаются одинаковыми.

*) Обращаем внимание читателя на то, что условия для треугольника помечены арабскими цифрами, а для тетраэдра — римскими.

Условие III. Если смыслы двух тетраэдров оба одинаковы, или оба обратны со смыслом третьего тетраэдра, то эти смыслы считаются одинаковыми; если же смысл одного одинаков, а другого обратен со смыслом третьего тетраэдра, то данные смыслы считаются обратными.

Прежде всего можно доказать предложение, аналогичное доказанному выше для треугольника.

190. Смыслы $ABCD$ двух тетраэдров $ABCD$, дополняющих друг друга до одного из трехгранных углов, будут обратными.

Возьмем тетраэдры, дополняющие друг друга до угла A (черт. 42), и пусть тетраэдр $A'BCD$ целиком содержится в одном из них; тогда его смысл $A'BCD$ одинаков со смыслом $ABCD$ последнего тетраэдра (условие II). Далее имеем:

смысл $ABCD$ (др. тетраэдра) одинаков со смыслом $BADC$ (189)

„ $BADC$ „ „ „ „ „ $A'ADC$ (усл. II)

„ $A'BCD$ „ „ „ „ „ „ $BA'DC$ (189)

„ $BA'DC$ „ „ „ „ „ „ $AA'DC$ (усл. II)

„ $A'ADC$ обратен смыслу $AA'DC$ (189)

„ $ABCD$ „ „ „ $A'BCD$ (усл. III повторно).

Следовательно смыслы $ABCD$ первоначально данных тетраэдров будут обратными (условие III), ч. и т. д.

Замечание. Однако здесь это не приведет нас к противоречию, как в случае треугольников. Действительно, если от тетраэдра $ABCD$ мы перейдем к двум тетраэдрам $ABCD$, из которых один дополняет его до угла A , а другой до угла B , то эти два тетраэдра не будут дополнять друг друга до одного из углов (у них одинаковы лишь два скрещивающихся ребра, а остальные — взаимно-дополнительны).

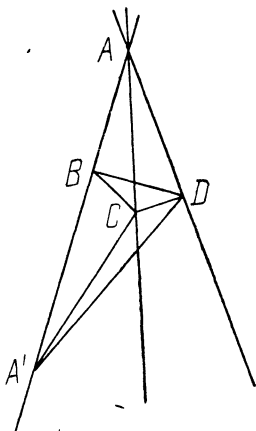
На очереди стоит доказательство совместности условий I—III; для этого обратимся к помощи аналитической геометрии и произведем вспомогательное исследование.

На основании изложенного в аналитической геометрии на плоскости мы можем прямо сделать следующие утверждения для пространства. Пусть даны 4 точки:

$A(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \omega_1)$; $B(\xi_2, \eta_2, \zeta_2, \omega_2)$; $C(\xi_3, \eta_3, \zeta_3, \omega_3)$; $D(\xi_4, \eta_4, \zeta_4, \omega_4)$; координаты точек отрезка $[CD]$ задаются выражениями;

$$l\xi = \xi_3 + \lambda\xi_4, \quad l\eta = \eta_3 + \lambda\eta_4, \quad \text{и т. д.},$$

где λ — произвольный параметр, а l — коэффициент пропорциональности, знак которого одинаков со знаком суммы $\omega_3 + \lambda\omega_4$ (а если она $= 0$, то со знаком предыдущей и т. д.). Мы знаем также, что $\lambda > 0$ для точек одного отрезка $[CD]$ и < 0 для точек другого (при $\lambda = 0$ получаем точку C , а при $\lambda = \infty$ — точку D).



Черт. 42.

Далее треугольник BCD можно определить как совокупность точек всевозможных отрезков, соединяющих т. B со всеми точками отрезка $[CD]$; применяя предыдущее правило, получаем вейерштрассовы координаты точек треугольника BCD в виде:

$$l\xi = \xi_2 + \lambda\xi_3 + \mu\xi_4; \quad l\eta = \eta_2 + \lambda\eta_3 + \mu\eta_4, \quad \text{и т. д.},$$

где λ и μ — произвольные параметры; четырем треугольникам BCD соответствуют 4 возможных комбинации знаков у этих параметров. Наконец, распространяя эти выводы на тетраэдр $ABCD$, получаем координаты его точек в виде

$$\left. \begin{aligned} l\xi &= \xi_1 + \lambda\xi_2 + \mu\xi_3 + \nu\xi_4 \\ l\eta &= \eta_1 + \lambda\eta_2 + \mu\eta_3 + \nu\eta_4 \\ l\zeta &= \zeta_1 + \lambda\zeta_2 + \mu\zeta_3 + \nu\zeta_4 \\ l\omega &= \omega_1 + \lambda\omega_2 + \mu\omega_3 + \nu\omega_4 \end{aligned} \right\}$$

где λ, μ, ν произвольные параметры, а l — коэффициент

пропорциональности, имеющий знак первой (считая с конца) суммы, стоящей в правой части и не равной нулю. Указанные параметры λ, μ, ν имеют в общем восемь различных комбинаций для знаков; каждая из таких комбинаций соответствует вполне определенному тетраэдру $ABCD$.

Определитель, составленный из координат данных точек

$$\Omega = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 & \omega_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 & \omega_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 & \omega_3 \\ \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 & \omega_4 \end{vmatrix}$$

может $= 0$ только при условии, что четыре точки A, B, C, D лежат в одной плоскости; следовательно, для тетраэдра $ABCD$ должно быть

$$\Omega \neq 0.$$

Обозначим далее через ε число отрицательных чисел среди параметров λ, μ, ν , дающих некоторый вполне определенный тетраэдр $ABCD$. Тогда знак числа

$$(-1)^\varepsilon \cdot \Omega$$

условимся временно называть знаком указанного тетраэдра $ABCD$.

Непосредственно ясно, что для знака тетраэдра удовлетворяется условие III, введенное для его смысла. Далее, условие I практически применяется через теорему 189, а эта теорема остается в силе для знака тетраэдра $KLMN$, как это следует из свойства определителя менять свой знак при перемещении двух строк. Переходим к доказательству того, что и условие II выполняется для знака тетраэдра.

Пусть тетраэдр $A'BCD$ целиком принадлежит тетраэдру $ABCD$, знак которого определяется числом

$$(-1)^\varepsilon \cdot \Omega.$$

Так как т. A' принадлежит этому же тетраэдру, то ее координаты задаются формулами

$$l_0 \xi' = \xi_1 + \lambda_0 \xi_2 + \mu_0 \xi_3 + \nu_0 \xi_4 \text{ и т. д.}$$

где среди чисел λ_0, μ_0, ν_0 имеется ε отрицательных. Желая вычислить знак тетраэдра $A'BCD$, составим определитель:

$$\Omega' = \frac{1}{l_0} \cdot \begin{vmatrix} \xi_1 + \lambda_0 \xi_2 + \mu_0 \xi_3 + \nu_0 \xi_4; & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Пользуясь известными свойствами определителей, найдем:

$$\Omega' = \frac{1}{l_0} \cdot \Omega.$$

Далее точки любого из тетраэдров $A'BCD$ задаются координатами:

$$\frac{1}{l_0} \cdot \{ \xi_1 + (\lambda_0 + l_0 \lambda') \xi_2 + (\mu_0 + l_0 \mu') \xi_3 + (\nu_0 + l_0 \nu') \xi_4 \}$$

$$\frac{1}{l_0} \cdot \{ \eta_1 + (\lambda_0 + l_0 \lambda') \eta_2 + (\mu_0 + l_0 \mu') \eta_3 + (\nu_0 + l_0 \nu') \eta_4 \},$$

и т. д.

Теперь важно решить, при каких знаках у параметров λ', μ', ν' получится тетраэдр $A'BCD$, целиком принадлежащий тетраэдру $ABCD$ (будут ли выписанные выше координаты вейерштрассовыми, или однородными, здесь безразлично). Для этого числа

$$\lambda_0 + l_0 \lambda', \quad \mu_0 + l_0 \mu', \quad \nu_0 + l_0 \nu'$$

при любых (по численным значениям) λ', μ', ν' должны иметь знаки чисел λ_0, μ_0, ν_0 . Если через ε' обозначить число отрицательных параметров λ', μ', ν' , то

$$\text{при } l_0 > 0 \text{ имеем } \varepsilon' = \varepsilon;$$

$$\text{„ } l_0 < 0 \text{ „ } \varepsilon' = 3 - \varepsilon.$$

После изложенного знак тетраэдра $A'BCD$ есть знак числа:

$$(-1)^{\varepsilon'} \cdot \Omega' = \frac{(-1)^{\varepsilon'}}{l_0} \cdot \Omega;$$

если $l_0 > 0$, то знак правой части одинаков со знаком числа $(-1)^{\varepsilon} \cdot \Omega$; если $l_0 < 0$, то:

$$(-1)^{\varepsilon'} \cdot \Omega' = \frac{(-1)^{3-\varepsilon}}{l_0} \cdot \Omega = -\frac{1}{l_0} \cdot (-1)^{\varepsilon} \cdot \Omega,$$

т. е. дело сводится к знаку того же числа $(-1)^{\varepsilon} \cdot \Omega$. Итак, знаки наших тетраэдров одинаковы, ч. и т. д.

Возвращаясь снова к учению о смысле тетраэдра, мы в состоянии теперь доказать, что условия I—III никогда не приведут нас к противоречию, т. е. не заставят одновременно утверждать о двух смыслах, что они и одинаковы и обратны. В самом деле, если бы это случилось, то, проведя параллельно рассуждения о „знаках тетраэдра“, мы пришли бы к тому, что для двух чисел, не равных нулю, пришлось бы утверждать и одинаковость и различие знаков.

191. Смыслы двух любых тетраэдров $ABCD$ и $A'B'C'D'$ — сравнимы (т. е.: либо одинаковы, либо обратны).

Надо постепенно различить следующие случаи:

1) Три вершины — общие, т. е. даны тетраэдры $ABCD$ и $A'BCD$. Точка A' принадлежит одному из восьми тетраэдров $ABCD$, который и будем иметь в виду в ближайшем исследовании; тогда один из тетраэдров $A'BCD$ целиком принадлежит ему. На основании условия II, смыслы $ABCD$ и $A'BCD$ этих тетраэдров одинаковы; что же касается других смыслов и других тетраэдров с теми же вершинами, то здесь вступают в силу теоремы 189, 190, условие III.

2) Две вершины — общие, т. е. даны тетраэдры $ABCD$

и $A'B'CD$. Пусть точка A' не лежит в плоскости ACD (A' и B' не могут обе лежать в ней). Берем вспомогательный тетраэдр $A'ACD$ и, на основании п. 1 и наших условий, решаем задачу.

3) Одна вершина общая, т. е. даны тетраэдры $ABCD$ и $A'B'C'D$. Все три точки A' , B' , C' не могут лежать в плоскости ACD ; пусть т. C' не лежит в этой плоскости. Берем тетраэдр $ACDC'$, и дело сводится к предыдущим пунктам.

4) Все вершины — различны. Берем тетраэдр $ABCD'$, если D' не принадлежит плоскости ABC , и дело сводится к предыдущему.

Следующие две теоремы имеют вспомогательное значение для дальнейшего; их доказательство, основанное на сделанных выше условиях, ради сокращения опускается.

192. Дан тетраэдр $ABCD$ и пусть точки A_1 и C_1 лежат соответственно внутри ребер $[AB]$ и $[CD]$; тогда смыслы $ABCD$ и A_1BC_1D соответствующих тетраэдров (второй служит частью первого) — одинаковы.

193. Дан тетраэдр $ABCD$, и пусть точка A_1 лежит внутри ребра $[AB]$, а т. B_1 — внутри взаимно дополнительного отрезка; тогда смыслы $ABCD$ и A_1B_1CD соответствующих тетраэдров одинаковы (во втором ребро $[A_1B_1]$ содержит часть $[A_1B]$ ребра $[AB]$ первого, а ребро $[CD]$ — то же самое).

Не входя в дальнейшие подробности, закончим главу несколькими определениями.

Смысл трехгранного угла определяется как смысл того тетраэдра, которого углом он является; а смысл двугранного угла связывается со смыслом трехгранного, так что в конечном счете дело сводится к смыслу тетраэдра.

Два равных образа одного и того же смысла называ-

ются конгруэнтными, а равные образы обратных смыслов симметричными.

В эллиптической планиметрии это различие не имеет определенного характера, так как там невозможно сравнение смыслов различных треугольников (см. выше).

Прибегая к „языку движения“, можно указанное обстоятельство пояснить следующим образом. Два треугольника ABC' и ABC'' , где C' и C'' — симметричны относительно прямой AB , в евклидовой геометрии не могут быть совмещены при помощи движения, не выводящего их из данной плоскости. В эллиптической же геометрии, когда отрезок $[AB]$ пробежит всю прямую AB , то треугольник ABC' совместится с треугольником ABC'' (если перемещать только первый, оставляя второй в покое). В самом деле полупрямые OC' и OC'' , где O — полюс прямой AB , поменяются местами (надо помнить, что полный угол, который опишет целая прямая, равен π), так что точка C' придет в положение т. C'' . К указанной особенности эллиптической плоскости мы еще вернемся ниже.

Здесь естественно будет сделать одно замечание о движениях в эллиптическом пространстве. Легко понять, что поступательное движение вдоль некоторой прямой будет в то же время вращением вокруг ее полюсы, и обратно. Указанное обстоятельство должно внести упрощение в кинематику эллиптического пространства.

ХІІІ. ПРАВАЯ И ЛЕВАЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ.

В главе VI были изучены равноотстоящие прямые или так называемые „параллели Клиффорда“; между прочим мы видели (теорема 117), что из данной точки к данной прямой можно провести две и только две параллели. Сам Клиффорд счел нужным различить их, как „право- и лево-параллельные“, причем здесь он основывался на различии между правым и левым кинематическим винтом. Также в общем обстоит дело у Бонолы; при доказательствах автор открыто ссылается на интуицию, которой должно быть непосредственно ясно упомянутое различие*). Вполне отчетливо и логически безукоризненно сформулировано интересующее нас различие в упоминавшейся уже книге Уайтхеда; но автор применяет особое исчисление, корни которого восходят к Грассману.

Изложенное в предыдущей главе учение о смысле тетраэдра также позволяет разобраться в указанном вопросе.

194. Если $CD \parallel AB$, а прямые CA, DB и C_1A_1, D_1B_1 суть две пары общих перпендикуляров этих равноотстоящих прямых, то смыслы $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ тетраэдров $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, определенных по ребрам $[CA], [DB], [C_1A_1], [D_1B_1] < \text{ппр.}$, будут одинаковыми.

Прежде всего надо указать на то, что наши тетраэдры определены не вполне, ибо для полного определения

*) Бонола, Неевклидова геометрия (см., например, стр. 166.)

тетраэдра, при данных вершинах, надо задать три ребра, известным образом расположенные. Данные ребра $[CA]$, $[DB]$ имеются у двух тетраэдров $ABCD$, у которых все остальные ребра — взаимно-дополнительны (см. выше о 4-гранной поверхности). Эти тетраэдры получаются один из другого путем двукратного перехода от данного тетраэдра к тетраэдру, дополняющему его до одного из трегранных углов; тогда теорема 190 и условие III показывают, что смыслы $ABCD$ обоих тетраэдров $ABCD$ — одинаковы, а потому совершенно безразлично, о каком тетраэдре идет речь. Само же доказательство теоремы основывается на применении теоремы 192 и условий для сравнения смыслов у тетраэдров.

Определение 60. Если $CD \parallel AB$ и прямые CA, DB суть общие перпендикуляры этих равноотстоящих прямых, то смыслом параллельности CD к AB называется смысл $ABCD$ (важен порядок точек) тетраэдра $ABCD$, определенного по ребрам $[CA]$ и $[DB] < \text{ппр.}$

195. Смыслы параллельности двух прямых, проходящих через данную точку и равноотстоящих от данной прямой, будут обратными.

Будем иметь в виду черт. 21, где из точки A проведены две равноотстоящие AL и AM от прямой KK' . Согласно определению 60, смыслы их параллельности определяются смыслами $KK'AL$ и $KK'AM$ соответствующих тетраэдров; теорема 189 показывает, что эти смыслы можно заменить такими:

$$LAK'K \text{ и } MAK'K.$$

Так как точка M принадлежит отрезку, взаимно-дополнительному с ребром $[K'L]$, то нетрудно понять, что тетраэдр $MAK'K$ является частью тетраэдра $LAK'K$, дополняющего первый тетраэдр $LAK'K$ до трегрannого угла при L ; следовательно, смысл $MAK'K$ одинаков со смыслом $LAK'K$ этого тетраэдра (условие II). Но смыслы $LAK'K$ двух

тетраэдров $LAK'K$, дополняющих друг друга до угла L , будут обратными (190). Наконец, условие III дает нам обратность рассматриваемых смыслов параллельности, ч. и т. д.

Определение 61. Возьмем в пространстве какую-нибудь определенную прямую и вне ее тоже определенную точку A ; по предыдущему построим обе параллели Клиффорда AL и AM к данной прямой. Условимся смысл параллельности AM к KK' называть правым, а смысл параллельности AL к KK — левым. Соответственно этому прямую AM будем называть право-параллельной к KK' , а прямую AL — лево-параллельной. Эти термины переносятся затем на две любые равноотстоящие прямые, смотря по тому, будет ли смысл их параллельности одинаков со смыслом $KK'AM$ (правым) или со смыслом $KK'AL$ (левым) [см. теорему 191].

196. Если CD право (лево-)-параллельна AB , то AB право (лево-)-параллельна CD .

Пусть прямые CA и DB будут общими перпендикулярами данных равноотстоящих прямых; тогда смыслы параллельности CD к AB и AB к CD определяются соответственно смыслами $ABCD$ и $CDAB$ одного и того же тетраэдра $ABCD$; но эти смыслы — одинаковы (189), ч. и т. д.

197. Если CD право (лево-)-параллельна AB , то два их общих перпендикуляра будут соответственно лево (право)-параллельны друг другу.

Пусть прямые CA и DZ будут общими перпендикулярами (но не взаимными полярами); в таком случае:

$$CA \not\parallel DB \text{ (115).}$$

Смыслы параллельности CD к AB и AC к BD определяются смыслами $ABCD$ и $BDAC$ известного тетраэдра; но эти смыслы обратны, ибо второе размещение получается из первого с помощью следующих трех перемещений по две буквы:

$$(A, B), (A, D) (A, C).$$

Подобным же методом можно доказать еще следующие теоремы, из которых первая является естественным обобщением теоремы 197:

198. Если $ACDB$ есть косо́й параллелограмм и CD право (лево)-параллельна AB , то AC будет лево (право)-параллельной BD .

199. Если прямые a , b , c равноотстоят друг от друга, то все они право- или все лево-параллельны друг другу.

200. Если b и c обе право- или лево-параллельны прямой a , то c соответственно право- или лево-параллельна прямой b .

XIV. ОДНОСТОРОННОСТЬ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ.

На подлежащую исследованию особенность эллиптической плоскости впервые обратил внимание Клейн *). У этого автора мы заимствуем ниже основной признак для различения односторонних и двусторонних поверхностей.

Упомянутый признак Клейна основан на внутренних свойствах самой поверхности и заключается в следующем. Выберем на поверхности какой-нибудь бесконечно-малый элемент ее, снабженный определенным направлением пробега, и заставим его, после произвольного перемещения по поверхности, вернуться в первоначальное положение; тогда возможны два случая: 1) направление пробега всегда остается тем же самым, 2) иногда меняется на обратное. В первом случае мы имеем дело с двусторонней поверхностью, а во втором — с односторонней; в виде примера, указанный признак можно применить к поверхности шара и к мёбиеву листу.

В качестве элемента поверхности мы можем теперь взять круг с достаточно малым радиусом, или даже треугольник со сторонами, меньшими полупрямой; этому элементу надо приписать определенное направление пробе-

*) Klein, Ueber die sogenannte Nicht-Eukl. Geometrie (Math. Ann. Bd. 6); см. также Klein, Nicht-Eukl. Geom. (Göttingen 1893), Bd. I, S. 91—105. Краткое указание имеем в книге Бонолы. Неевклидова геометрия (стр. 126—128); названные выше Ньюкомб и Уайтхэд тоже уделили внимание интересующему нас вопросу.

га, другими словами — определенный „смысл“, так что затронутый вопрос имеет тесную связь с вопросом о смысле геометрических образов.

Излагая свой критерий, К л е й н говорит о перемещениях элемента поверхности и об его совпадении с первоначальным положением, т. е. — ради простоты он прибегает здесь к „языку движения“. Но, как известно, от последнего при желании можно избавиться и свести дело к „конгруэнтным преобразованиям“, другими словами к точечному соответствию между конгруэнтными образами. Тогда вопрос о возможности или невозможности совместить два равных образа с обратными смыслами, в чем заключается сущность критерия К л е й н а, сводится к различению между конгруэнтными и симметричными фигурами. Если это различие имеет вполне определенный характер на данной поверхности, то в таком случае нельзя говорить о „совмещении двух равных фигур с обратными смыслами при помощи движений, не выводящих их за пределы данной поверхности“, и наоборот, если последнее оказывается возможным, то указанное различие теряет определенное значение. Так, по нашему мнению, следует понимать „язык движения“ в применении к фигурам на данной поверхности.

Таким образом, в конечном счете признак К л е й н а заключается в вопросе: возможно ли на данной поверхности различать конгруэнтные и симметричные образы или нет?

В главе о смысле фигур было доказано, что для эллиптической плоскости это невозможно; а потому последняя является односторонней поверхностью *).

Что же касается ограниченных частей эллиптической

*) Подобную постановку вопроса находим у Б а р б а р е н а (La Géométrie non euclidienne, Scientia № 15): на односторонней плоскости можно, посредством перемещения в этой плоскости, совместить треугольник с другим, ему симметричным.

плоскости, то для них возможно говорить о двух различных сторонах. Это следует из того, что здесь нельзя уже говорить о пробеге полной прямой; точно также здесь не будет того противоречия, на которое мы натолкнулись в главе XII (ибо в ограниченной области нельзя говорить о треугольниках, дополняющих друг друга до одного из углов).

Сущность вышеизложенного можно резюмировать в следующих предложениях:

Определение 62. Поверхность называется двусторонней или односторонней, смотря по тому, можно ли или нельзя провести на ней различие между конгруэнтными и симметричными образами.

201. Эллиптическая плоскость есть поверхность односторонняя.

XV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В предшествующих главах мы старались осветить важнейшие особенности эллиптической геометрии, связав их с положенной в основу системой аксиом.

В заключение мы считаем нужным, в самых кратких словах, наметить различные истолкования эллиптической системы. Такие истолкования, связывая необычную для нас систему геометрии с хорошо знакомыми областями знания (например, с евклидовой геометрией или с анализом), являются подсобным средством для изучения новой геометрии и — самое главное — устанавливают ее логическую состоятельность настолько прочно, насколько это можно утверждать о тех дисциплинах, которые дали материал для истолкования *). Для достижения этой цели надо прежде всего указать, какие именно конкретные объекты подводятся в данном случае под основные понятия (таковых в нашей системе имеется три: „точка“, „разделение двух пар точек“, „равенство отрезков“), а затем доказать, что при таком понимании основных понятий все утверждения аксиом остаются в силе. После этого вся геометрическая система, покоящаяся исключительно на аксиомах, получает истолкование в данной совокупности объектов.

Наметим теперь некоторые истолкования эллиптической геометрии.

*) Механизм истолкования геометрической системы всесторонне освещен в известной книге Вебер-Вельштейна, Основания геометрии.

1) Заслуженной известностью пользуется истолкование Клейна для эллиптической планиметрии в евклидовой связке. Основные понятия понимаются следующим образом:

„точка“ — прямая (полная) связки;

„разделение двух пар точек“ — разделение двух пар прямых одной и той же плоскости связки.

Далее нетрудно сообразить, что под „отрезком“ здесь приходится понимать угол между двумя прямыми связки, так что „равенство отрезков“ понимается как равенство углов.

Не представляет большого труда убедиться, что все аксиомы эллиптической геометрии (за исключением XII и XIII, явно выходящих за пределы плоскости) остаются в силе при таком истолковании основных понятий; а потому и вся эллиптическая планиметрия получает истолкование в евклидовой связке *).

Если бы мы пожелали распространить указанный метод на полное эллиптическое пространство, то пришлось бы обратиться к параболической геометрии 4-х измерений; но такого рода понятия уже сами не могут считаться обычным орудием исследования.

2) В книге Вебер-Вельштейна **) дается истолкование для всей эллиптической геометрии, причем основой служит так называемая эллиптическая сеть сфер, т. е. совокупность шаров, имеющих в постоянной точке O одну и ту же отрицательную степень. Авторы систематически пользуются инверсией, центр которой находится в точке O , а степень равна степени сети. Так вот, под „точкой“ авторы условливаются понимать пару точек, взаимно обратных при указанной инверсии; „прямую“ послужит тогда окружность сети, а „плоскостью“ — ее

*) Это истолкование более подробно рассмотрено мною в „Основаниях геометрии“, стр. 289 — 297.

**) Названная выше книга, § 10 и 11.

сфера. Взаимно обратные точки, образующие вместе „точку“ в рассматриваемом истолковании, находятся на одной прямой, проходящей через O ; это дает повод говорить о „разделении двух пар точек“ тогда, когда соответствующие прямые попарно разделяют друг друга. Наконец, „равными“ называются те образы, которые преобразуются друг в друга при помощи инверсий относительно сфер сети. Очевидно, что, например, свойства разделения пар при таком истолковании сохраняются, а потому и свойства отрезка, прямой и т. д. За дальнейшими подробностями отсылаем к подлиннику.

3) Наконец, можно дать чисто аналитическое истолкование; наметим его основные черты *).

Под „точкой“ условимся понимать совокупность четырех вещественных чисел, взятых в определенном порядке и зараз не равных нулю: (x_1, x_2, x_3, x_4) , причем две точки считаются тождественными, когда составляющие их числа соответственно пропорциональны. Если нам даны две „точки“ x и y :

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad \text{и} \quad (y_1, y_2, y_3, y_4),$$

то совокупность точек z , где

$$z_i = ux_i + vy_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

а u и v — произвольные параметры, зараз не равные нулю называется „простейшей совокупностью“ (впоследствии доказывается, что это будет „прямая“). Поскольку речь идет о точках указанной совокупности, каждая из них вполне определяется заданием параметров u и v (точнее говоря, их отношением).

Пусть две точки P_m и P_n соответственно задаются зна-

*) При помощи этого истолкования в „Опыте элементарного обоснования геометрии Римана“ я доказал совместность аксиом I—XXIII. Пользуясь случаем, добавляю, что там же была установлена порядковая независимость указанной системы аксиом.

чениями параметров u_m, v_m и u_n, v_n ; тогда определитель

$$\begin{vmatrix} u_m & v_m \\ u_n & v_n \end{vmatrix} = u_m v_n - u_n v_m$$

обозначается символом

$$(mn)$$

и играет в последующем важную роль. Именно, если P_1, P_2, P_3, P_4 суть точки одной и той же простейшей совокупности, то ангармоническим отношением их называется следующая функция параметров:

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) = \frac{(13) \cdot (24)}{(14) \cdot (23)}.$$

Теперь мы уже в состоянии условиться об истолковании второго основного понятия; именно утверждение: „пара точек P_1 и P_2 разделяет пару точек P_3 и P_4 “ равносильно утверждению, что их ангармоническое отношение отрицательно:

$$(P_1 P_2 P_3 P_4) < 0.$$

Известные свойства ангармонического отношения позволяют с легкостью доказать соответствующие аксиомы, и вообще сделанные определения позволяют убедиться в том, что все аксиомы геометрии положения (акс. I — XIV) остаются в силе при рассматриваемом истолковании.

Переходя к геометрии меры, прежде всего определяем расстояние между точками x и y , как такое число r , которое удовлетворяет условиям

$$\cos r = \left| \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2}} \right|$$

$$0 \leq r \leq \frac{\pi}{2}.$$

Затем длиной отрезка называется число r или $(\pi - r)$, в зависимости от его отношения к „полупрямой“; а по-

следняя определяется как такой отрезок, для которого $\cos r = 0$. Наконец, два отрезка называются равными, если они имеют одну и ту же длину. После этого оказываются справедливыми все аксиомы равенства.

Таким образом вся эллиптическая геометрия получает чисто аналитическое истолкование.

О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
Предисловие	3
Введение	7
I. Обоснование геометрии положения	17
II. Учение о геометрическом равенстве	42
III. Взаимное положение двух окружностей	63
IV. Площадь треугольника	71
V. Полярность в эллиптическом пространстве	78
VI. Параллели Клиффорда	83
VII. Поверхность Клиффорда	102
VIII. Вывод тригонометрических зависимостей	109
IX. Длина окружности и площадь круга	148
X. Евклидова геометрия на поверхности Клиффорда	151
XI. Начала приложения анализа к геометрии	159
XII. Смысл геометрических образов	189
XIII. Правая и левая параллельность	214
XIV. Односторонность эллиптической плоскости	218
XV. Заключение	221

Отв. редактор *Е. В. Пулькин* Техн. редактор *В. О. Финити.*
Сдана в набор 2/I 1934 г. Подписана к печати 21/V 1934 г.
Формат $82 \times 110^{1/32}$. Бум. листов $3^{1/2}$. Тип. зн. в 1 бум. л. 152.064.
ГТТИ № 325.
Ленгорлит № 14159. Тираж 5.000 — авт. л. 9,36. Заказ № 2033.